

内江市高中 2026 届第一次模拟考试题

数学参考答案及评分意见

一、单选题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

1. C 2. B 3. A 4. B 5. C 6. D 7. A 8. A

二、多选题:本题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分.

9. AC 10. ACD 11. BCD

三、填空题:本题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分.

12. 160 13. $100(1 + \sqrt{3})$ 14. $\sqrt{2}$

四、解答题:本题共 5 小题,共 77 分.

15. 解:(1) 因为 $\sqrt{3}a\sin C - c\cos A = c$,

所以 $\sqrt{3}\sin A\sin C - \sin C\cos A = \sin C$ 2 分

由 $\sin C \neq 0$ 知 $\sqrt{3}\sin A - \cos A = 1$,

所以 $\sin(A - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ 5 分

由 $A \in (0, \pi)$ 知 $A = \frac{\pi}{3}$ 6 分

(2) 因为 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 所以 $\frac{1}{2}bc\sin A = \sqrt{3}$,

即 $bc = 4$ ① 9 分

由余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ 知 $b^2 + c^2 - bc = 4$,

则 $b^2 + c^2 = 8$ ② 12 分

由①②式解得 $b = c = 2$ 13 分

16. 解:(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 , 公差为 d .

由 $S_{10} = 25, S_{20} = 100$ 知 $10a_1 + \frac{45}{2}d = 25, 20a_1 + 190d = 100$ 4 分

联立方程, 解得 $a_1 = \frac{1}{4}, d = \frac{1}{2}$ 6 分

故 $a_n = \frac{2n-1}{4} (n \in N^*)$ 7 分

(2) 由(1)知 $S_n = \frac{n^2}{4}$, 故 $\sqrt{S_n} = \frac{n}{2} (n \in N^*)$ 9 分

因为 $a_n = \frac{2n-1}{4} < \frac{n}{2} = \sqrt{S_n} < \frac{2n+1}{4} = a_{n+1}$,

所以 $b_n = \frac{n}{4} (n \in N^*)$ 11 分

所以 $\frac{1}{b_n b_{n+1}} = \frac{16}{n(n+1)} = 16(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$ 13 分

所以 $\frac{1}{b_1 b_2} + \frac{1}{b_2 b_3} + \cdots + \frac{1}{b_n b_{n+1}} = 16[(1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})]$
 $= 16(1 - \frac{1}{n+1}) = \frac{16n}{n+1} (n \in N^*)$ 15 分

17. 解:(1) 对 $f(x) = 2x^3 - 3ax^2 + b$ 求导得: $f'(x) = 6x^2 - 6ax = 6x(x - a)$ 2 分

①当 $a < 0$ 时,

若 $x < a$ 或 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$; 若 $a < x < 0$ 时, $f'(x) < 0$,

故 $f(x)$ 在 $(-\infty, a), (0, +\infty)$ 单调递增, 在 $(a, 0)$ 单调递减 4 分

②当 $a = 0$ 时,

$f'(x) = 6x^2 \geq 0$, 故 $f(x)$ 在 R 上单调递增 5 分

③当 $a > 0$ 时,

若 $x < 0$ 或 $x > a$ 时, $f'(x) > 0$; 若 $0 < x < a$ 时, $f'(x) < 0$,

故 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0), (a, +\infty)$ 单调递增, 在 $(0, a)$ 单调递减 7 分

综上所述, 当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, a), (0, +\infty)$ 单调递增, 在 $(a, 0)$ 单调递减;

当 $a = 0$ 时, $f(x)$ 在 R 上单调递增;

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, 0), (a, +\infty)$ 单调递增, 在 $(0, a)$ 单调递减 ... 8 分

(2) 方法一: 由中心对称性质, $f(x_0 - x) + f(x_0 + x) = 2y_0$ 对 $\forall x \in R$ 成立 9 分

代入 $f(x)$ 展开得: $2(x_0 - x)^3 - 3a(x_0 - x)^2 + b + 2(x_0 + x)^3 - 3a(x_0 + x)^2 + b = 2y_0$,

化简得: $x_0 = \frac{a}{2}, y_0 = -\frac{a^3}{2} + b$ 11 分

需存在 $a \in [0, 2]$ 使得 $-\frac{a^3}{2} + \frac{a^3}{2} + b < 0$, 即 $2b < (a^3 - a)_{\max}$ 12 分

令 $g(x) = x^3 - x (x \in [0, 2])$, 求导得 $g'(x) = 3x^2 - 1$,

当 $x \in [0, \frac{\sqrt{3}}{3})$ 时, $g'(x) < 0$, 所以 $g(x)$ 在 $[0, \frac{\sqrt{3}}{3})$ 单调递减,

当 $x \in (\frac{\sqrt{3}}{3}, 2]$ 时, $g'(x) > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(\frac{\sqrt{3}}{3}, 2]$ 单调递增.

计算端点值: $g(0) = 0, g(2) = 6$, 故 $g(x)_{\max} = 6$ 14 分

因此 $2b < 6$, 即 $b < 3$ 15 分

方法二: 由题得 $f'(x) = 6x^2 - 6ax, f''(x) = 12x - 6a$ 9 分

令 $f''(x) = 0$, 解得 $x = \frac{a}{2}, y = b - \frac{a^3}{2}$ 10 分

所以 $f(x)$ 的对称中心为 $(\frac{a}{2}, b - \frac{a^3}{2})$

即 $x_0 = \frac{a}{2}, y_0 = b - \frac{a^3}{2}$ 11 分

需存在 $a \in [0, 2]$ 使得 $-\frac{a^3}{2} + \frac{a^3}{2} + b < 0$, 即 $2b < (a^3 - a)_{\max}$ 12 分

令 $g(x) = x^3 - x (x \in [0, 2])$, 求导得 $g'(x) = 3x^2 - 1$,

当 $x \in [0, \frac{\sqrt{3}}{3})$ 时, $g'(x) < 0$, 所以 $g(x)$ 在 $[0, \frac{\sqrt{3}}{3})$ 单调递减,

当 $x \in (\frac{\sqrt{3}}{3}, 2]$ 时, $g'(x) > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(\frac{\sqrt{3}}{3}, 2]$ 单调递增.

计算端点值: $g(0) = 0, g(2) = 6$, 故 $g(x)_{\max} = 6$ 14 分

因此 $2b < 6$, 即 $b < 3$ 15 分

18. 解:(1)

	每周自主锻炼时间超过 5 小时	每周自主锻炼时间不超过 5 小时	合计
短跑成绩合格	35	25	60
短跑成绩不合格	10	30	40
合 计	45	55	100

..... 2 分

根据表中的数据,可得 $\chi^2 = \frac{100 \times (35 \times 30 - 25 \times 10)^2}{60 \times 40 \times 45 \times 55} = \frac{3200}{297}$

$\approx 10.774 > 7.879 = \chi_{0.005}^2$ 5 分

根据小概率值 $\alpha = 0.005$ 的独立性检验,可推断 H_0 不成立,即认为学生短跑成绩合格与每周自主锻炼时间超过 5 小时有关 6 分

(2) 设事件 $A =$ “学生甲参加跑步技巧培训后短跑成绩合格”,

事件 $B_1 =$ “学生甲每周自主锻炼时间超过 5 小时,短跑成绩不合格”,

$B_2 =$ “学生甲每周自主锻炼时间不超过 5 小时,短跑成绩不合格”,

则 $P(B_1) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}, P(B_2) = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}, P(A|B_1) = \frac{5}{6}, P(A|B_2) = \frac{3}{4},$

所以 $P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) = \frac{1}{4} \times \frac{5}{6} + \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{37}{48}$ 10 分

所以从短跑成绩不合格的学生中随机抽取 1 名学生(记为甲)进行跑步技巧培训后,在学生甲短跑成绩合格的情况下,学生甲每周自主锻炼时间不超过 5 小时的概率为

$P(B_2|A) = \frac{P(B_2A)}{P(A)} = \frac{P(B_2)P(A|B_2)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{3}{4}}{\frac{37}{48}} = \frac{27}{37}$ 13 分

(3) 由题知 $P(N|M) > P(N|\bar{M})$, 所以 $\frac{P(NM)}{P(M)} > \frac{P(\bar{N}\bar{M})}{P(\bar{M})} = \frac{P(N) - P(NM)}{1 - P(M)}$, 因 $0 < P(M) < 1$,

故 $P(NM) > P(N)P(M)$ 14 分

所以 $P(NM) - P(N)P(NM) > P(N)P(M) - P(N)P(NM),$

即 $P(NM) \cdot P(\bar{N}) > P(N) \cdot P(\bar{N}M),$

所以 $\frac{P(NM)}{P(N)} > \frac{P(\bar{N}M)}{P(\bar{N})}$, 即 $P(M|N) > P(M|\bar{N})$ 17 分

19. 解:(1) 当 $a = 1$ 时, $g(x) = \frac{e^x}{\sin x + \cos x} (x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}])$,

求导得: $g'(x) = \frac{2e^x \sin x}{(\sin x + \cos x)^2} > 0 (x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}])$ 3 分

故 $g(x)$ 在 $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ 单调递增,

所以 $g(x)$ 最小值为 $g(\frac{\pi}{4}) = \frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\frac{\pi}{4}}$ 5 分

(2) ①对 $f(x) = e^x(\cos x + a \sin x)$ 求导得: $f'(x) = e^x[(a+1)\cos x + (a-1)\sin x]$... 6 分

令 $f'(x) = 0$, 得 $(a+1)\cos x + (a-1)\sin x = 0$,

当 $\cos x = 0$ 时, $\sin x = \pm 1$, 由 $0 < a < 1$ 知 $f'(x) \neq 0$,

当 $\cos x \neq 0$ 时, 化简得 $\tan x = \frac{1+a}{1-a}$ 7 分

因 $0 < a < 1$, $y = \tan x$ 是周期为 π 的函数且在每个周期内单调递增,

所以 $x_n - x_{n-1} = \pi$, 且 $x_1 \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$,

故 $\{x_n\}$ 是公差为 π 的等差数列,

即 $x_n = x_{n-1} + \pi$,

所以 $\frac{f(x_n)}{f(x_{n-1})} = \frac{f(x_{n-1} + \pi)}{f(x_{n-1})} = \frac{e^{x_{n-1} + \pi} [\cos(x_{n-1} + \pi) + a \sin(x_{n-1} + \pi)]}{e^{x_{n-1}} (\cos x_{n-1} + a \sin x_{n-1})} = -e^\pi$,

且 $f(x_1) = e^{x_1} (\cos x_1 + a \sin x_1) \neq 0$,

所以数列 $\{f(x_n)\}$ 是首项为 $f(x_1)$, 公比为 $-e^\pi$ 的等比数列 10 分

$$\textcircled{2} \left| \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n} \right| = \left| \frac{-e^\pi f(x_n) - f(x_n)}{\pi} \right| = \frac{e^\pi + 1}{\pi} |f(x_n)|,$$

由 $\textcircled{1}$ 知 $f(x_n) = f(x_1) \cdot (-e^\pi)^{n-1}$,

所以 $\left| \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n} \right| = \frac{(e^\pi + 1)e^{(n-1)\pi}}{\pi} |e^{x_1} (\cos x_1 + a \sin x_1)|$ 11 分

由 $\tan x_1 = \frac{1+a}{1-a}$, $x_1 \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ 知 $a = \frac{\tan x_1 - 1}{\tan x_1 + 1}$,

所以 $\left| \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n} \right| = \frac{(e^\pi + 1)e^{(n-1)\pi}}{\pi} \left| \frac{e^{x_1}}{\sin x_1 + \cos x_1} \right|$ 13 分

由 (1) 知 $\frac{e^{x_1}}{\sin x_1 + \cos x_1} > \frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$, 则 $\left| \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n} \right| > \frac{(e^\pi + 1)e^{(n-1)\pi} e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}\pi}$ 14 分

令 $h(x) = e^x - ex (x > 0)$ 则 $h'(x) = e^x - e$,

故 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 单调递增,

所以 $h(x) \geq h(1) = 0$, 即 $e^x \geq ex (x > 0)$,

于是, $e^{\frac{\pi}{4}} > e \cdot \frac{\pi}{4}$ 16 分

故 $\frac{(e^\pi + 1)e^{(n-1)\pi} e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}\pi} > \frac{(e^\pi + 1)e^{(n-1)\pi+1}}{4\sqrt{2}} > \frac{e^\pi \cdot e^{(n-1)\pi+1}}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{8} e^{n\pi+1}$ 17 分