字节精准教育联盟·NCS 高 2026 届高考适应性考试（一诊）

数学参考答案

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
B	A	C	D	A	A	D	D	ABC	ABD	ACD	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{2}$

15.　【解】

（1）在$\triangle ABC$中，由正弦定理及$2a\sin A=(2b+c)\sin B+(2c+b)\sin C$得：

$2a^2=(2b+c)b+(2c+b)c$，

化简可得：$b^2+c^2-a^2=-bc$，

由余弦定理得$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\dfrac{1}{2}$，

又$0<A<\pi$，所以$A=\dfrac{2\pi}{3}$

（2）AD 是$\triangle ABC$的角平分线，则$\angle BAD=\angle DAC=\dfrac{\pi}{3}$，

由$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle CAD}$可得$\dfrac{1}{2}bc\sin\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{1}{2}c\times AD\times\sin\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{1}{2}b\times AD\times\sin\dfrac{\pi}{3}$

因为$b=3$，$c=6$，即有$18=6AD+3AD$，

故$AD=2$.

16.【解】

（1）由题意，$\dfrac{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{|x-2|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

整理化简得，$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，

所以曲线C的标准方程为$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$.

（2）由题意，直线 $FM, F'N$ 的斜率都存在，设 $k_{FM}=k_{F'N}=k$，

则直线 $F'N$ 的方程为 $y=k(x+1)$，

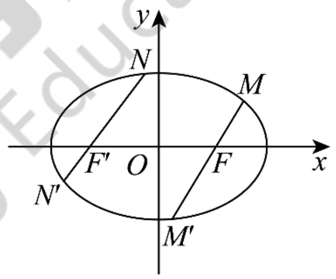
分别延长 NF'，MF 交曲线 C 于点 N', M'，

设 $N(x_1, y_1), N'(x_2, y_2)$，

联立 $\begin{cases} y=k(x+1) \\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1 \end{cases}$，即 $(1+2k^2)x^2+4k^2x+2k^2-2=0$，

则 $x_1+x_2=-\dfrac{4k^2}{1+2k^2}, x_1x_2=\dfrac{2k^2-2}{1+2k^2}$，

根据对称性，可得 $|FM|=|F'N'|$，



则 $|FM|+|F'N|=|NN'|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\left(-\dfrac{4k^2}{1+2k^2}\right)^2-4\times\dfrac{2k^2-2}{1+2k^2}}=\dfrac{2\sqrt{2}(1+k^2)}{1+2k^2}$，

即 $\dfrac{2\sqrt{2}(1+k^2)}{1+2k^2}=\dfrac{8}{7}\sqrt{2}$，解得 $k=\pm\sqrt{3}$，

所以直线 FM 的斜率为 $\pm\sqrt{3}$.

17.

（1）【证明】

因为 A，D 分别为 MB，MC 的中点，所以 $AD // BC$.

因为 $BM\perp BC$，所以 $BM\perp AD$，所以 $PA\perp AD$，

又 $PA\perp AB$，$AB\cap AD=A$，AB，$AD\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $PA\perp$ 平面 $ABCD$.

【解】

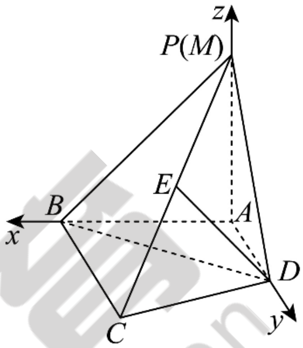
（2）因为 $PA\perp AB$，$PA\perp AD$，$\angle DAB=90^\circ$，所以 AP，AB，AD 两两垂直.

以 A 为坐标原点，AB，AD，AP 所在直线分别为 x，y，z 轴，

建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$，

依题意有 $A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$C(2,2,0)$，$D(0,1,0)$，$P(0,0,2)$，$E(1,1,1)$，

则 $\overrightarrow{PC}=(2,2,-2)$，$\overrightarrow{DE}=(1,0,1)$，$\overrightarrow{BD}=(-2,1,0)$，$\overrightarrow{BP}=(-2,0,2)$.



设平面 PBD 的法向量 $\vec{n}=(x_1,y_1,z_1)$，

则有 $\begin{cases}\overrightarrow{BD}\cdot\vec{n}=(-2,1,0)\cdot(x_1,y_1,z_1)=-2x_1+y_1=0\\ \overrightarrow{BP}\cdot\vec{n}=(-2,0,2)\cdot(x_1,y_1,z_1)=-2x_1+2z_1=0\end{cases}$

令 $y_1=2$，得 $x_1=1$，$z_1=1$，所以 $\vec{n}=(1,2,1)$ 是平面 PBD 的一个法向量.

设直线 DE 与平面 PBD 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=\left|\cos\langle\overrightarrow{DE},\vec{n}\rangle\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，于是可得 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

所以 $\tan\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以直线 DE 与平面 PBD 所成角的正切值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

（3）假设存在 λ，使平面 GAD 与平面 PAD 夹角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

即使平面 GAD 与平面 PAD 夹角的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

由（2）得，$\overrightarrow{PG}=\lambda\overrightarrow{PC}=(2\lambda,2\lambda,-2\lambda)(0\le\lambda\le1)$，

所以 $G(2\lambda,2\lambda,2-2\lambda)$，$\overrightarrow{AD}=(0,1,0)$，$\overrightarrow{AG}=(2\lambda,2\lambda,2-2\lambda)$.

易得平面 PAD 的一个法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(1,0,0)$.

设平面 ADG 的法向量 $\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$，

$\begin{cases}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{n_2}=(0,1,0)\cdot(x_2,y_2,z_2)=y_2=0\\ \overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{n_2}=(2\lambda,2\lambda,2-2\lambda)\cdot(x_2,y_2,z_2)=2\lambda x_2+2\lambda y_2+(2-2\lambda)z_2=0\end{cases}$，

解得 $y_2=0$，令 $z_2=\lambda$，得 $x_2=\lambda-1$，

则 $\overrightarrow{n_2}=(\lambda-1,0,\lambda)$ 是平面 ADG 的一个法向量.

则有 $\left|\cos\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\dfrac{\left|(1,0,0)\cdot(\lambda-1,0,\lambda)\right|}{\sqrt{(\lambda-1)^2+\lambda^2}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，

即 $\dfrac{|\lambda-1|}{\sqrt{(\lambda-1)^2+\lambda^2}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，所以 $3\lambda^2+2\lambda-1=0$，解得 $\lambda=\dfrac{1}{3}$ 或 -1

又因为 $0\leqslant\lambda\leqslant1$，所以 $\lambda=\dfrac{1}{3}$.

故存在 $\lambda=\dfrac{1}{3}$，使平面 GAD 与平面 PAD 夹角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

18.【解】

（1）因为 $f(x)=(x+1)\cdot e^x$，

所以 $f'(x)=(x+1)'\cdot e^x+(x+1)\cdot(e^x)'=e^x+(x+1)\cdot e^x=(x+2)\cdot e^x$.

由 $f'(x)>0\Rightarrow x>-2$；由 $f'(x)<0\Rightarrow x<-2$.

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 上单调递减，在 $(-2,+\infty)$ 上单调递增.

在 $x=-2$ 处，函数取得极小值，$f(-2)=-\dfrac{1}{e^2}$.

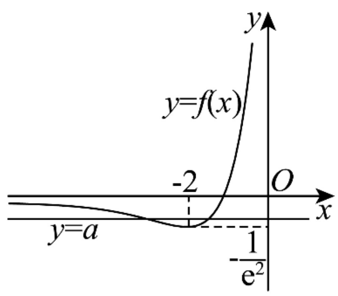
无极大值.

（2）当 $x<-2$ 时，$f(x)<0$；

当 $x=-1$ 时，$f(x)=0$；

当 $x>-1$ 时，$f(x)>0$.

作函数 $f(x)$ 草图如右图：



所以 $f(x)=a$ 有两个解，可得 $-\dfrac{1}{e^2}<a<0$.

即所求 a 的取值范围为：$\left(-\dfrac{1}{e^2},0\right)$

19.

【证明】（1）由 $a_{n+1}+2^{n+1}=4a_n$，则 $a_{n+1}-2^{n+1}=4a_n-2\cdot 2^{n+1}=4\left(a_n-2^n\right)$，

又 $a_1-2^1=4$，所以数列 $\left\{a_n-2^n\right\}$ 是以 4 为首项 4 为公比的等比数列.

【解】（2）由（1）知，$a_n-2^n=4^n$，则 $a_n=4^n+2^n$，

所以 $S_n=4^1+4^2+\cdots+4^n+2^1+2^2+\cdots+2^n=\dfrac{4\times\left(1-4^n\right)}{1-4}+\dfrac{2\times\left(1-2^n\right)}{1-2}$

$=\dfrac{4^{n+1}}{3}+2^{n+1}-\dfrac{10}{3}$.

（3）由 $a_n=4^n+2^n$，

则 $b_n=\dfrac{a_n}{a_n+2}=\dfrac{4^n+2^n}{4^n+2^n+2}$，

由于 $4^n+2^n<4^n+2^n+2$，则 $b_n<1$，

所以 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n<n$.

由 $b_n=\dfrac{a_n}{a_n+2}=1-\dfrac{2}{a_n+2}$，则 $T_n=n-2\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{a_k+2}$，

要证 $T_n>n+\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n-\dfrac{2}{3}$，即证 $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{a_k+2}<\dfrac{1}{3}\left[1-\left(\dfrac{2}{5}\right)^n\right]$，

由 $a_{n+1}+2^{n+1}=4a_n$，则 $a_{k+1}+2^{k+1}=4a_k$，

则 $a_{k+1}+2=4a_k-2^{k+1}+2=4\left(a_k+2\right)-2^{k+1}-6$，

下面证明 $a_{k+1}+2>\dfrac{5}{2}\left(a_k+2\right)$，

当 $k=1$ 时，$a_2+2=22,\dfrac{5}{2}\left(a_1+2\right)=20$，即 $a_2+2>\dfrac{5}{2}\left(a_1+2\right)$；

假设 $k=m$，$m\geqslant 2$，$m\in\mathrm{N}^*$ 时，$a_{m+1}+2>\dfrac{5}{2}\left(a_m+2\right)$，

则 $k=m+1$ 时，

$$a_{m+2}+2=4\left(a_{m+1}+2\right)-2^{m+2}-6>4\times\frac{5}{2}\left(a_m+2\right)-2^{m+2}-6=\frac{5}{2}\left(4a_m+2\right)-2^{m+2}+9$$

$$=\frac{5}{2}\left[\left(4a_m+2\right)-\frac{1}{5}\cdot 2^{m+3}+\frac{18}{5}\right]=\frac{5}{2}\left[4\left(a_m+2\right)-2^{m+1}-6+\frac{1}{5}\cdot 2^{m+1}+\frac{48}{5}\right]$$

$$=\frac{5}{2}\left(a_{m+1}+2+\frac{1}{5}\cdot 2^{m+1}+\frac{48}{5}\right)>\frac{5}{2}\left(a_{m+1}+2\right).$$

综上所述，$a_{k+1}+2>\frac{5}{2}\left(a_k+2\right)$，则 $\frac{1}{a_{k+1}+2}<\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{a_k+2}$，

所以 $\frac{1}{a_k+2}<\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{a_{k-1}+2}<\left(\frac{2}{5}\right)^2\cdot\frac{1}{a_{k-2}+2}<\cdots<\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{a_1+2}=\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}$，

则 $\frac{1}{a_k+2}\le\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}$，当且仅当 $k=1$ 时取等，

则 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k+2}\le\frac{1}{8}\cdot\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1-\frac{2}{5}}=\frac{5}{24}\left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right]<\frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right]$，即 $T_n>n+\frac{2}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n-\frac{2}{3}$.

综上所述，$n+\frac{2}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n-\frac{2}{3}<T_n<n$.