

四川省高三年级第一次联合诊断性考试

数学参考答案及评分标准

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求。

1	2	3	4	5	6	7	8
B	D	C	A	C	B	A	C

二、选择题：本大题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，选对但不全的得部分分，有选错的得 0 分。

9	10	11
AD	ACD	ABD

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 5 13. 420 14. 7 (2 分), $8\sqrt{3}$ (3 分)

四、解答题：本大题共 5 小题，共 77 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. 【命题意图】通过体育锻炼活动创设情境，设计基础性与应用性问题，考查概率、条件概率和独立性检验等基础知识，考查概率的计算和独立性检验思想的应用方法，考查数学抽象、数学建模、数据分析等素养。

【解析】

(1) 设事件 A = “选到的学生是男生”，事件 B = “选到的学生经常锻炼”，

方法 1：

依题意，

$$P(A) = \frac{250}{400} = \frac{5}{8},$$

$$P(AB) = \frac{200}{400} = \frac{1}{2}, \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\therefore P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{4}{5}; \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

方法 2：

依题意，

$$n(A) = 250, n(AB) = 200, \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$P(B|A) = \frac{n(AB)}{n(A)} = \frac{200}{250} = \frac{4}{5}; \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

(2) 提出零假设 H_0 ：性别因素与是否经常锻炼无关，
\dots\dots\dots 7 分

根据表中数据，得到：

$$\chi^2 = \frac{400(50 \times 100 - 50 \times 200)^2}{100 \times 300 \times 250 \times 150} = \frac{80}{9} \approx 8.889 > \chi_{0.01}, \quad \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

根据小概率值 $\alpha = 0.01$ 的独立性检验，推断 H_0 不成立，即认为该校学生的性别因素与是否经常锻炼
\dots\dots\dots 13 分

16. 【命题意图】通过三角函数图象和性质创设情境,设计基础性问题,考查三角函数的周期、单调性、值域等性质,考查同角三角函数关系,二倍角的余弦,三角函数图象的平移等基础知识,考查换元法和待定系数法,考查数学运算、逻辑推理、直观想象等素养。

【解析】

(1) $\because$ 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π ,

$$\therefore \omega = 2, \text{ 即 } f(x) = 2\sin(2x - \frac{\pi}{6}),$$

$$\text{由 } f(\alpha) = \frac{6}{5}, \text{ 即 } 2\sin(2\alpha - \frac{\pi}{6}) = \frac{6}{5},$$

$$\text{则 } \sin(2\alpha - \frac{\pi}{6}) = \frac{3}{5}, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\therefore \alpha \in (\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}),$$

$$\therefore 2\alpha - \frac{\pi}{6} \in (0, \frac{\pi}{2}),$$

$$\therefore \cos(2\alpha - \frac{\pi}{6}) = \frac{4}{5}, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\therefore \sin^2(\alpha - \frac{\pi}{12}) = \frac{1 - \cos(2\alpha - \frac{\pi}{6})}{2} = \frac{1}{10}, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{由 } \alpha - \frac{\pi}{12} \in (0, \frac{\pi}{4}),$$

$$\therefore \sin(\alpha - \frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{10}}{10}; \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

(2) 由(1)知, $f(x) = 2\sin(2x - \frac{\pi}{6})$,

其图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位后得到的图象对应函数为 $y = 2\sin(2x - \frac{\pi}{3})$,

再向上平移 2 个单位得到的图象对应函数为 $y = 2\sin(2x - \frac{\pi}{3}) + 2$,

$$\text{即 } g(x) = 2\sin(2x - \frac{\pi}{3}) + 2. \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{当 } x \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}] \text{ 时, } 2x - \frac{\pi}{3} \in [-\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}],$$

$$\text{令 } t = 2x - \frac{\pi}{3}, t \in [-\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}],$$

则 $y = \sin t$ 在区间 $[-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}]$ 上单调递减, 在区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}]$ 上单调递增, $\dots\dots\dots 13 \text{ 分}$

$$\therefore \sin(-\frac{\pi}{2}) \leq \sin t \leq \sin \frac{\pi}{3},$$

$$\text{即 } -1 \leq \sin(2x - \frac{\pi}{3}) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore 0 \leq 2\sin(2x - \frac{\pi}{3}) + 2 \leq 2 + \sqrt{3}.$$

故函数 $y = g(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ 上的值域为 $[0, 2 + \sqrt{3}]$. $\dots\dots\dots 15 \text{ 分}$

17. 【命题意图】通过四棱锥创设情境,设计基础性与综合性问题,考查直线与平面、平面与平面的位置关系、二面角、空间向量等基础知识,考查线面平行的性质定理的运用方法以及二面角的正弦值计算方法,考查数学抽象、直观想象、数学运算等素养。

【解析】

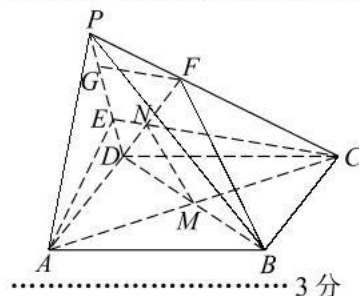
(1) 如图, 设 $AC \cap BD = M$, 连接 FD 交 CE 于点 N , 连接 MN ,

$$\because BF \parallel \text{平面 } ACE, BF \subset \text{平面 } BDF, \text{平面 } BDF \cap \text{平面 } AEC = MN,$$

$$\therefore BF \parallel MN,$$

$$\because M \text{ 为 } BD \text{ 的中点},$$

$$\therefore \frac{FN}{ND} = \frac{BM}{MD} = 1,$$



$\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

过点 F 作 $FG \parallel CE$, 交 PD 于点 G ,

$$\text{则 } \frac{DE}{EG} = 1,$$

$$\therefore \frac{PE}{ED} = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \frac{PG}{GE} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{PF}{FC} = \frac{PG}{GE} = \frac{1}{2},$$

$$\text{即 } PF = \frac{1}{2} FC;$$

..... 6 分

(2) 如图, 取 AD 中点 O , 连接 PO , BO ,

$\because \triangle PAD$ 为正三角形,

$\therefore PO \perp AD$,

又 $\because$ 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$,

$\therefore PO \perp$ 平面 $ABCD$,

在菱形 $ABCD$ 中, $\angle DAB = 60^\circ$,

$\therefore BO \perp AD$,

以 O 为原点, OA , OB , OP 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴,

建立如图所示的空间直角坐标系,

$\because AD = 6$,

$$\therefore B(0, 3\sqrt{3}, 0), C(-6, 3\sqrt{3}, 0), D(-3, 0, 0), P(0, 0, 3\sqrt{3}),$$

$$\text{由(1)知 } \frac{PF}{FC} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore F(-2, \sqrt{3}, 2\sqrt{3}),$$

..... 9 分

设平面 BDF 的一个法向量为 $\mathbf{m} = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{由 } \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{DB} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{DF} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} 3x_1 + 3\sqrt{3}y_1 = 0, \\ x_1 + \sqrt{3}y_1 + 2\sqrt{3}z_1 = 0, \end{cases}$$

$$\text{令 } x_1 = 1, \text{ 得平面 } BDF \text{ 的一个法向量为 } \mathbf{m} = (1, -\frac{\sqrt{3}}{3}, 0),$$

..... 11 分

设平面 PBC 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\text{由 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PB} = 0, \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} -6x_2 = 0, \\ 3\sqrt{3}y_2 - 3\sqrt{3}z_2 = 0, \end{cases}$$

$$\text{令 } y_2 = 1, \text{ 得平面 } PBC \text{ 的一个法向量为 } \mathbf{n} = (0, 1, 1),$$

..... 13 分

$$\text{则 } |\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{(1, -\frac{\sqrt{3}}{3}, 0) \cdot (0, 1, 1)}{\sqrt{1^2 + (-\frac{\sqrt{3}}{3})^2} \times \sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$\text{故二面角 } D-BF-C \text{ 的正弦值为 } \frac{\sqrt{14}}{4}.$$

..... 15 分

18. 【命题意图】通过抛物线与平面向量创设情境, 设计基础性、综合性问题, 考查平面向量的线性运算与数量积、抛物线定义、标准方程和几何性质等基础知识, 考查抛物线和平面向量的知识和方法的综合运用, 考查数学抽象、直观想象、数学运算等素养。

【解析】

(1) 由 $\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{MF} = 0$, 得 $MF \perp OF$,

$\because M$ 为抛物线 C 上位于第一象限内的一点,

$$\text{设 } M(\frac{p}{2}, y_0), y_0 > 0,$$

$$\text{则 } y_0 = \sqrt{2p \cdot \frac{p}{2}} = p,$$

$$\text{即 } M(\frac{p}{2}, p),$$

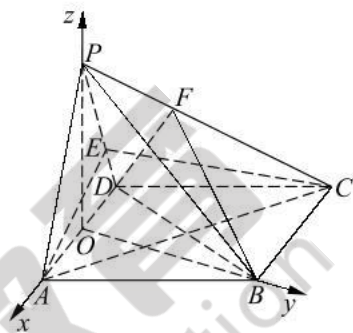
..... 2 分

$$\text{由题知, } |\overrightarrow{FO} - \overrightarrow{FM}| = |\overrightarrow{MO}| = \sqrt{(\frac{p}{2})^2 + p^2} = \sqrt{5},$$

解得 $p = 2$,

$$\therefore \text{抛物线 } C \text{ 的方程为 } y^2 = 4x;$$

..... 4 分



(2)由上可知,点 F 的坐标为 $(1, 0)$,

若直线 FM 的斜率不存在,则直线 FM 垂直于 x 轴, P 是 $x = -1$ 与 x 轴的交点,显然是 $M'N'$ 的中点,
..... 5 分

若直线 FM 的斜率存在,易知该直线斜率不为 0,

可设直线 FM 的方程为 $x = ty + 1$,

$$\text{联立} \begin{cases} x = ty + 1, \\ y^2 = 4x, \end{cases}$$

整理得 $y^2 - 4ty - 4 = 0$,

设点 M, N 的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$,

则 $y_1 + y_2 = 4t$, 7 分

设 M', N' 的坐标分别为 $(x'_1, y'_1), (x'_2, y'_2)$,

根据题意, $y'_1 + y'_2 = y_1 + y_2 = 4t$,

由前可得,直线 FP 的方程为 $y = -t(x - 1)$,

于是点 P 的坐标为 $(-1, 2t)$,

$\therefore M', P, N'$ 三点在同一直线上,

$y'_1 + y'_2 = 2y_P$,

$\therefore P$ 是线段 $M'N'$ 的中点; 9 分

(3)可设 $M(\frac{m^2}{4}, m)(m > 0)$,

由上可得 $\vec{FO} = (-1, 0)$, $\vec{FM} = (\frac{m^2}{4} - 1, m)$,

由 $\vec{FO} \cdot \vec{FM} = -3$, 得 $1 - \frac{m^2}{4} = -3$, 解得 $m = 4$,

$\therefore$ 点 M 的坐标为 $(4, 4)$, 11 分

由题意得直线 l 必不垂直于 y 轴,

$\therefore$ 可设 $l: x - 6 = n(y + 4)$,

$$\text{联立} \begin{cases} x - 6 = n(y + 4), \\ y^2 = 4x, \end{cases}$$

整理得 $y^2 - 4ny - 16n - 24 = 0$,

其中 $\Delta = 16n^2 + 4(16n + 24) = 16(n^2 + 4n + 6) > 0$ 恒成立,

设 $A(x_3, y_3), B(x_4, y_4)$,

由韦达定理,有 $y_3 + y_4 = 4n, y_3y_4 = -16n - 24$,

进而得 $x_3 + x_4 = \frac{y_3^2}{4} + \frac{y_4^2}{4} = \frac{(y_3 + y_4)^2 - 2y_3y_4}{4} = 4n^2 + 8n + 12$,

$x_3x_4 = \frac{y_3^2}{4} \cdot \frac{y_4^2}{4} = \frac{(y_3y_4)^2}{16} = 16n^2 + 48n + 36$, 14 分

$$\begin{aligned} \therefore k_{MA} \cdot k_{MB} &= \frac{y_3 - 4}{x_3 - 4} \cdot \frac{y_4 - 4}{x_4 - 4} \\ &= \frac{y_3y_4 - 4(y_3 + y_4) + 16}{x_3x_4 - 4(x_3 + x_4) + 16} \\ &= \frac{-32n - 8}{16n + 4} \\ &= -2, \end{aligned}$$

综上可得,直线 MA, MB 的斜率之积为定值 -2 17 分

19. 【命题意图】通过函数和导数的应用创设情境,设计基础性、综合性、创新性问题,主要考查函数、导数等基础知识,利用导数研究函数图象和性质的方法,以及函数与不等式知识的运用,考查数学抽象、逻辑推理、数学运算等素养。

【解析】

(1)当 $a = 2$ 时, $f(x) = 2e^{2x} - x$,

则 $f'(x) = 4e^{2x} - 1$,

设切点 $(x_0, 2e^{2x_0} - x_0)$,

则切线斜率为 $f'(x_0) = 4e^{2x_0} - 1$,

切线方程为 $y - 2e^{2x_0} + x_0 = (4e^{2x_0} - 1)(x - x_0)$, 2 分

将点 $(0, m)$ 的坐标代入得 $m - 2e^{2x_0} + x_0 = (4e^{2x_0} - 1)(-x_0)$,

即 $m = (2 - 4x_0)e^{2x_0}$,

设 $h(x) = (2 - 4x)e^{2x}$,

则 $h'(x) = -8xe^{2x}$,

可知当 $x < 0$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增,

当 $x > 0$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减,

$\therefore$ 当 $x = 0$ 时, $h(x)$ 取得极大值 $h(0) = 2$,

由于 $x \rightarrow -\infty$ 时, $h(x) \rightarrow 0$,

当 $x > \frac{1}{2}$ 时, $h(x) < 0$,

$\therefore$ 当 $m = (2 - 4x_0)e^{2x_0}$ 有两个不相等的实数根时,

$0 < m < 2$,

即过点 $(0, m)$ 可以作曲线 $y = f(x)$ 两条切线时, 实数 m 的取值范围是 $(0, 2)$; 5 分

(2)由 $f(x) = ae^{2x} + (a - 2)e^x - x$,

得 $f'(x) = 2ae^{2x} + (a - 2)e^x - 1 = (ae^x - 1)(2e^x + 1)$,

(i) 当 $a \leq 0$ 时,

$f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

$f(x)$ 最多只有一个零点, 不符合题意, 6 分

当 $a > 0$ 时,

若 $x < \ln \frac{1}{a}$, 则 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

若 $x > \ln \frac{1}{a}$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

$\therefore x = \ln \frac{1}{a}$ 时, $f(x)$ 取得极小值 $f(\ln \frac{1}{a})$, 也即为最小值, 8 分

又 $\because$ 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$,

$x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 有两个零点,

则 $f(\ln \frac{1}{a}) < 0$,

得 $ae^{2\ln \frac{1}{a}} + (a - 2)e^{\ln \frac{1}{a}} - \ln \frac{1}{a} < 0$,

即 $1 - \frac{1}{a} + \ln a < 0$,

由于 $a > 0$, 则函数 $p(a) = 1 - \frac{1}{a} + \ln a$ 是增函数, 且 $p(1) = 0$,

$\therefore$ 不等式 $1 - \frac{1}{a} + \ln a < 0$ 的解为 $0 < a < 1$,

$\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $(0, 1)$; 10 分

(ii) ①由(i)知, $0 < a < 1, x_2 > \ln \frac{1}{a}$,

$$\text{要证 } x_2 > \frac{2-2a}{1+a},$$

$$\text{只需证 } \ln \frac{1}{a} > \frac{2-2a}{1+a},$$

$$\text{即证明 } \ln a + \frac{4}{1+a} - 2 < 0,$$

$$\text{令 } u(a) = \ln a + \frac{4}{1+a} - 2,$$

$$\text{则 } u'(a) = \frac{1}{a} - \frac{4}{(1+a)^2} = \frac{(1-a)^2}{a(1+a)^2} > 0,$$

则 $u(a)$ 单调递增,

$$\therefore u(a) < u(1) = 0,$$

$$\text{即 } \ln a + \frac{4}{1+a} - 2 < 0,$$

$$\therefore x_2 > \frac{2-2a}{1+a};$$

..... 13 分

②取 $x' = \ln(\frac{3}{a} - 1)$,

$$\text{则 } e^{x'} = \frac{3}{a} - 1,$$

$$\text{则 } f(\ln(\frac{3}{a} - 1)) = a(\frac{3}{a} - 1)^2 + (a-2)(\frac{3}{a} - 1) - \ln(\frac{3}{a} - 1) = \frac{3}{a} - 1 - \ln(\frac{3}{a} - 1),$$

$$\text{令 } k = \frac{3}{a} - 1,$$

$$\text{则 } k > 1, f(\ln(\frac{3}{a} - 1)) = k - \ln k,$$

$$\text{设 } q(k) = k - \ln k,$$

$$\text{则 } q'(k) = 1 - \frac{1}{k} > 0, q(k) \text{ 单调递增},$$

$$\text{则 } q(k) > q(1) = 1 > 0,$$

$$\therefore f(\ln(\frac{3}{a} - 1)) > 0,$$

$$\therefore x_2 < \ln(\frac{3}{a} - 1),$$

..... 15 分

$$\text{要证 } x_2 < \frac{9-6a}{6a-2a^2},$$

$$\text{只需证 } \ln(\frac{3}{a} - 1) < \frac{9-6a}{6a-2a^2},$$

$$\text{令 } t = \frac{3}{a} - 1,$$

$$\text{则 } a = \frac{3}{t+1} \text{ 且 } t > 1,$$

$$\text{只需证明 } \ln t < \frac{9-6 \cdot \frac{3}{t+1}}{6 \cdot \frac{3}{t+1} - 2(\frac{3}{t+1})^2} = \frac{1}{2}t - \frac{1}{2t}.$$

$$\text{令 } v(t) = \ln t - (\frac{1}{2}t - \frac{1}{2t}),$$

$$\text{则 } v'(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2t^2} = \frac{-t^2 + 2t - 1}{2t^2} = \frac{-(t-1)^2}{2t^2} < 0,$$

$\therefore v(t)$ 单调递减,

$$\therefore v(t) < v(1) = 0,$$

$$\text{即 } \ln t < \frac{1}{2}t - \frac{1}{2t}, \ln(\frac{3}{a} - 1) < \frac{9-6a}{6a-2a^2} \text{ 得证},$$

$$\text{综上所述, } \frac{2-2a}{1+a} < x_2 < \frac{9-6a}{6a-2a^2}.$$

..... 17 分

解析：

1. 【命题意图】借助集合表示的两种方法创设情境，设计基础性问题，主要考查集合的概念、交集的运算、一元二次不等式解法，考查数学运算、逻辑推理等素养。

【答案】B

【解析】 $\because$ 集合 $M = \{x | -1 \leq x \leq 3\}$, $\therefore M \cap N = \{-1, 0, 1, 3\}$.

2. 【命题意图】通过复数运算和几何意义创设情境，设计基础性问题，考查复数的几何意义，复数在复平面内所对应的点的理解，对复数的四则运算的掌握及运用，考查数学运算和直观想象等素养。

【答案】D

【解析】由已知得 $z = \frac{7-i}{1+i} = \frac{(7-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{6-8i}{2} = 3-4i$, 则复数 z 所对应的点为 $(3, -4)$, 位于第四象限.

3. 【命题意图】通过数列前 n 项的积创设情境，设计基础性问题，考查充分必要条件等基础知识，考查等比数列的性质的应用，考查逻辑推理和数学运算等素养。

【答案】C

【解析】 $\because$ 数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, $\therefore a_1 a_{10} = a_2 a_9 = a_3 a_8 = a_4 a_7 = a_5 a_6$, 则 $T_{10} = a_1 a_2 \cdots a_{10} = (a_5 a_6)^5$. 由 $a_5 a_6 > 0$, 显然有 $T_{10} > 0$, 反之亦然.

4. 【命题意图】通过由图象辨别解析式创设情境，设计基础性问题，主要考查函数图象和性质等基础知识，考查由函数图象辨别函数解析式的方法，考查直观想象、数学抽象等素养。

【答案】A

【解析】根据图象可知, $f(x)$ 是奇函数, 在四个选项中, 只有选项 A, B 中的函数是奇函数, 故选项 C, D 错误; 对于选项 B, 由于当 $x > 0$ 时, $\sin x - x < 0$, 则 $f(x) < 0$, 选项 B 错误, 故选 A.

5. 【命题意图】通过棉花纤维长度样本创设情境，设计基础性、应用性问题，主要考查统计数据的意义和识别，考查极差、中位数、平均值的计算方法，考查数据分析等素养。

【答案】C

【解析】根据表中数据, 这 400 根棉花纤维的长度的极差估计值不超过 $350 - 50 = 300$ (mm), 选项 A 错误; 纤维长度低于 200 mm 的棉花纤维数占比为 $\frac{30+40+60}{400} = \frac{13}{40} < \frac{1}{3}$, 选项 B 错误; 由于纤维长度小于 200 的纤维数量为 130, 纤维长度不低于 250 的纤维数量为 150, 可知这 400 根棉花纤维的长度的中位数估计值介于 200 mm 至 250 mm 之间, 选项 C 正确; 400 根棉花纤维的长度的平均值估计值为 $\frac{1}{400} \times (30 \times 75 + 40 \times 125 + 60 \times 175 + 120 \times 225 + 100 \times 275 + 50 \times 325) = 221.25$, 选项 D 错误(也可根据表中数据直观看出选项 D 错误).

6. 【命题意图】通过长方体切截问题创设情境，设计基础性问题，主要考查长方体和锥体的体积公式基础知识，考查长方体和锥体体积的计算的方法，考查直观想象、数学运算等素养。

【答案】B

【解析】截出的棱锥高与长方体相同, 底面面积是长方体的一半, 则该棱锥的体积为长方体体积的 $\frac{1}{6}$, 余下部分的体积为长方体体积的 $\frac{5}{6}$, 所以余下部分的体积与所截出棱锥的体积的比值是 5.

7. 【命题意图】通过双曲线创设情境，设计基础性问题，主要考查双曲线的定义、标准方程和几何性质基础知识，考查双曲线上的点与两个焦点构成的三角形面积的计算和双曲线知识和方法的运用，考查直观想象、数学运算等素养。

【答案】A

【解析】根据 $|F_1 F_2| = 4$ 可知, 双曲线的半焦距 $c = 2$, 由 $c^2 = a^2 + 3$ ($a > 0$), 得 $a = 1$. 根据双曲线的定义, $||PF_1| - |PF_2|| = 2a = 2$, 即 $||PF_2| - 3| = 2$, 可得 $|PF_2| = 5$ 或 $|PF_2| = 1$. 当 $|PF_2| = 1$ 时, 点 P 在 x 轴上, 不符合题意, 则 $|PF_2| = 5$, 由于 $|PF_1| = 3$, $|F_1 F_2| = 4$, 可知 $\triangle PF_1 F_2$ 是直角三角形, $\therefore \triangle PF_1 F_2$ 的面积 $S = \frac{1}{2} |PF_1| \cdot |F_1 F_2| = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$, 故选 A.

8. 【命题意图】通过函数及不等式恒成立问题创设情境,设计基础性、创新性问题,主要考查函数与不等式等基础知识,考查不等式的转化、利用导数研究函数最值的方法,考查数学抽象、直观想象等素养。

【答案】C

【解析】令 $g(x) = x - a$, $h(x) = e^x - b$, 则 $f(x) = g(x)h(x)$. 当 $x \in (-\infty, a)$ 时, $g(x) < 0$; 当 $x \in (a, +\infty)$ 时, $g(x) > 0$. ①当 $b \leq 0$ 时, $h(x) > 0$, 但 $\forall x \in \mathbf{R}$ 不一定保证 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 不符合题意; ②当 $b > 0$ 时, 可知当 $x \in (-\infty, \ln b)$ 时, $h(x) < 0$; 当 $x \in (\ln b, +\infty)$ 时, $h(x) > 0$, 由于 $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) \geq 0$, 得 $a = \ln b$, 即 $b = e^a$, $\therefore ab^2 = ae^{2a}$, $a \in \mathbf{R}$. 令 $\varphi(x) = xe^{2x}$, 则 $\varphi'(x) = (2x+1)e^{2x}$, 由 $\varphi'(x) < 0$ 得 $x < -\frac{1}{2}$, $\varphi'(x) > 0$ 得 $x > -\frac{1}{2}$, 则 $\varphi(x)$ 在区间 $(-\infty, -\frac{1}{2})$ 上单调递减, 在区间 $(-\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递增, $\therefore \varphi(x)_{\min} = \varphi(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2e}$, $\therefore ab^2$ 的最小值为 $-\frac{1}{2e}$. 故选 C.

9. 【命题意图】通过等差数列创设情境,设计基础性问题,考查等差数列概念、性质、前 n 项和的最小值,前 n 项和与通项的关系等基础知识,考查数学运算、逻辑推理等素养。

【答案】AD

【解析】由 $2a_5 = a_3 + a_7 = -22$, $\therefore a_5 = -11$, 又 $\because a_1 = -19$, 则数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d = \frac{a_5 - a_1}{5-1} = \frac{-11 - (-19)}{4} = 2$, 选项 A 正确; 由 $a_n = a_1 + (n-1)d = 2n - 21 > 0$, $n > \frac{21}{2}$, $\because n \in \mathbf{Z}$, $\therefore n$ 的最小值为 11, 选项 B 错误; 由 $a_{10} = -1 < 0$, $a_{11} = 1 > 0$, $\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 前 10 项和最小, 其最小值为 -100 , 选项 C 错误; 由 $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(-19 + a_n)}{2}$, $\therefore 2S_n = na_n - 19n$, 选项 D 正确.

10. 【命题意图】通过椭圆创设情境,设计综合性问题,考查椭圆的定义、标准方程和几何性质等基础知识,考查曲线轨迹方程的求法和椭圆知识综合运用,考查数学抽象、逻辑推理、数学运算等素养。

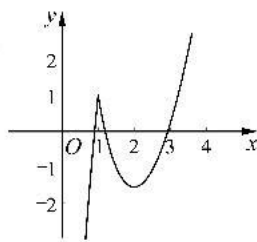
【答案】ACD

【解析】设点 P 的坐标为 (x_P, y_P) , 则 $|OP|^2 = x_P^2 + y_P^2 = x_P^2 + 1 - \frac{x_P^2}{4} = \frac{3x_P^2}{4} + 1 \geq 1$, $\therefore |PQ|$ 的最小值为 2, 选项 A 正确; 显然, 点 P 到 OF 的距离的最大值为 1, $|OF| = \sqrt{3}$, 根据椭圆的对称性, $\triangle PFQ$ 的面积的最大值为 $2 \times \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 1 = \sqrt{3}$, 选项 B 错误; 易知点 A_1, A_2 的坐标分别为 $(-2, 0), (2, 0)$, $\therefore$ 直线 PA_1, PA_2 的斜率之积为 $\frac{y_P}{x_P+2} \cdot \frac{y_P}{x_P-2} = \frac{1 - \frac{x_P^2}{4}}{x_P^2 - 4} = -\frac{1}{4}$, 选项 C 正确; 不妨设点 M 在线段 OP 上, 点 M 的坐标为 (x_M, y_M) , 则 $PM = \frac{2}{3}PO$, 且 $x_P = 3x_M, y_P = 3y_M$, 代入椭圆 C 的方程, 有 $\frac{(3x_M)^2}{4} + (3y_M)^2 = 1$, 即 $9x_M^2 + 36y_M^2 - 4 = 0$, 选项 D 正确.

11. 【命题意图】通过二次函数与对数函数构成的新函数为创新情境,设计基础性、创新性等问题,主要考查函数、导数等基础知识,考查函数图象和性质的研究路径和方法,考查数学抽象、数学运算、逻辑推理等素养。

【答案】ABD

【解析】函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$. 当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) = x^2 + 8\ln x$, 此时 $f(x)$ 单调递增; 当 $x \geq 1$ 时, $f(x) = x^2 - 8\ln x$, $f'(x) = 2x - \frac{8}{x} = \frac{2(x^2 - 4)}{x}$, 可知当 $1 \leq x < 2$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 当 $x > 2$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增. $\therefore f(x)$ 的极小值为 $f(2) = 4 - 8\ln 2 > -4$, 选项 A 正确; $\because f(\frac{1}{e}) < 0, f(1) = 1 > 0$, $f(2) < 0, f(4) > 0$, 可知 $f(x)$ 在 $(0, 1), (1, 2), (2, 4)$ 上各有一个零点, 共 3 个零点, 选项 B 正确; 当 $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 时, $0 < \cos \alpha < \sin \alpha < 1$, 由于当 $0 < x < 1$ 时, $f(x)$



单调递增, 则 $f(\sin \alpha) > f(\cos \alpha)$, 选项 C 错误; $f(x)$ 的图象如图所示, 令 $t = f(x)$, 则方程 $f(t) = \frac{1}{2}$ 有三个根 $t_1, t_2, t_3 (t_1 < t_2 < t_3)$, 且 $0 < t_1 < 1, 1 < t_2 < 2, 2 < t_3 < 4$, 可知, 方程 $t_1 = f(x)$ 有 3 个实数根, $t_2 = f(x), t_3 = f(x)$ 各有 1 个实数根, $\therefore$ 方程 $f[f(x)] = \frac{1}{2}$ 有 5 个相异实数根, 选项 D 正确.

12. 【命题意图】通过向量创设情境,设计基础性问题,考查平面向量的概念、向量的线性运算及其几何意义,考查两个向量垂直的判断方法,考查数学运算等素养。

【答案】5

【解析】由已知, $\lambda \mathbf{a} - \mathbf{b} = (\lambda + 1, \lambda - 2)$, $\because (\lambda \mathbf{a} - \mathbf{b}) \perp \mathbf{b}$, $\therefore (\lambda + 1, \lambda - 2) \cdot (-1, 2) = 0$, 即 $-\lambda - 1 + 2\lambda - 4 = \lambda - 5 = 0$, $\therefore \lambda = 5$.

13. 【命题意图】通过电影选看方法创设生活实践情境,设计基础性、应用性问题,考查分类加法和分步乘法计数原理的理解应用,考查数学抽象、逻辑推理等素养。

【答案】420

【解析】方法 1: 甲、乙选看的电影中最多有 1 部相同包括: (1) 两人选看的电影均不相同, 不同选法有 $C_7^2 C_3^2 = 210$ (种); (2) 两人选看的电影有且仅有一部相同, 不同选法有 $C_7^1 A_6^2 = 210$ (种), $\therefore$ 不同的选法总共有 $210 + 210 = 420$ (种).

方法 2: 甲、乙各选两部电影的不同选法有 $C_7^2 C_7^2 = 441$ (种), 其中选到的两个均相同的选法为 $C_7^2 = 21$ (种), $\therefore$ 最多有 1 部相同的选法共有 $441 - 21 = 420$ (种).

14. 【命题意图】通过三角形与四边形创设情境,考查余弦定理、两个和差的三角函数、同角间的三角函数关系、特殊角的三角函数值、三角形面积等基础知识,考查数学抽象、逻辑推理、数学运算等素养。

【答案】7 (2 分), $8\sqrt{3}$ (3 分)

【解析】在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得 $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos 120^\circ = 5^2 + 3^2 - 2 \times 5 \times 3 \times (-\frac{1}{2}) = 49$, $\therefore AC = 7$. $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中, $\cos \angle ACB = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC} = \frac{7^2 + 3^2 - 5^2}{2 \times 7 \times 3} = \frac{11}{14}$, $\therefore \sin \angle ACB = \frac{5\sqrt{3}}{14}$, $\therefore \sin \angle ACD = \sin (120^\circ - \angle ACB) = \sin 120^\circ \cos \angle ACB - \cos 120^\circ \sin \angle ACB = \frac{4\sqrt{3}}{7}$, $\therefore S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} AC \cdot CD \cdot \sin \angle ACD = \frac{1}{2} \times 7 \times 4 \times \frac{4\sqrt{3}}{7} = 8\sqrt{3}$.