

四川省高三年级第一次联合诊断性考试

数 学

考试时间 120 分钟，满分 150 分

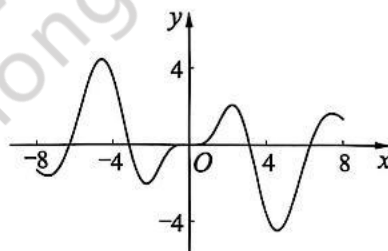
注意事项：

1. 答题前，考生务必在答题卡上将自己的姓名、座位号、考籍号用 0.5 毫米的黑色签字笔填写清楚，考生考试条形码由监考老师粘贴在答题卡上的“贴条形码区”。
2. 选择题使用 2B 铅笔填涂在答题卡上对应题目标号的位置上，如需改动，用橡皮擦擦干净后再填涂其它答案；非选择题用 0.5 毫米的黑色签字笔在答题卡的对应区域内作答，超出答题区域答题的答案无效；在草稿纸上、试卷上答题无效。
3. 考试结束后由监考老师将答题卡收回。

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求。

1. 已知集合 $M = \{x^2 - 2x - 3 \leq 0\}$, $N = \{-3, -1, 0, 1, 3\}$, 则 $M \cap N =$
A. $\{-3, -1, 0, 1\}$ B. $\{-1, 0, 1, 3\}$ C. $\{-1, 0, 1\}$ D. $\{0, 1, 3\}$
2. 已知复数 z 满足 $(1+i)z = 7-i$, 则在复平面内复数 z 所对应的点位于
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
3. 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的积记为 T_n , 即 $T_n = a_1 a_2 \cdots a_n$, 则“ $a_5 a_6 > 0$ ”是“ $T_{10} > 0$ ”成立的
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件
4. 右图是下列四个函数中的某个函数在区间 $[-8, 8]$ 上的大致图象，则该函数可能是

- A. $f(x) = \frac{x^4 \sin x}{e^x + e^{-x}}$
- B. $f(x) = \frac{x^4 (\sin x - x)}{e^x + e^{-x}}$
- C. $f(x) = \frac{x^4 \cos x}{e^x + e^{-x}}$
- D. $f(x) = \frac{x^4 (\cos x - x)}{e^x + e^{-x}}$



5. 棉花的纤维长度是棉花质量的重要指标. 在一批棉花中随机抽测了 400 根棉花纤维的长度(单位: mm), 整理得到下表数据:

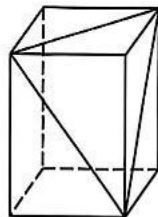
纤维长度 (mm)	[50, 100)	[100, 150)	[150, 200)	[200, 250)	[250, 300)	[300, 350)
频数	30	40	60	120	100	50

根据表中数据, 关于对样本数据的分析, 下列结论中正确的是

- A. 棉花纤维的长度的极差估计值大于 300 mm
- B. 棉花纤维中, 其长度低于 200 mm 的棉花纤维数占三分之一
- C. 棉花纤维的长度的中位数估计值介于 200 mm 至 250 mm 之间
- D. 棉花纤维的长度的平均值估计值介于 150 mm 至 200 mm 之间

6. 如图, 将一个长方体沿相邻三个面的对角线截出一个棱锥, 则余下部分的体积与所截出棱锥的体积的比值是

A. 3
B. 5
C. 6
D. 8



7. 已知 P 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3} = 1$ ($a > 0$) 上的点, 该双曲线的两个焦点分别为 F_1 与 F_2 , 且 $|PF_1| = 3, |F_1F_2| = 4$, 则 $\triangle PF_1F_2$ 的面积是

A. 6 B. 10 C. 12 D. 20

8. 设函数 $f(x) = (x-a)(e^x - b)$. 若 $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \geq 0$, 则 ab^2 的最小值为

A. $-\frac{1}{2e^2}$ B. $-\frac{1}{e^2}$ C. $-\frac{1}{2e}$ D. $-\frac{1}{e}$

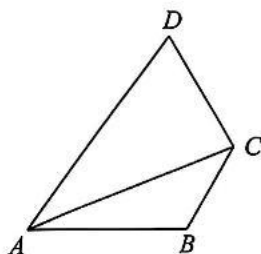
二、选择题: 本大题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分, 选对但不全的得部分分, 有选错的得 0 分。

9. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = -19, a_3 + a_7 = -22$, 则
- A. 数列 $\{a_n\}$ 的公差为 2
B. 满足 $a_n > 0$ 的 n 的最小值为 10
C. 数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和的最小值为 -99
D. 数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和 S_n 满足 $2S_n = na_n - 19n$
10. 设椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的左、右顶点分别为 A_1, A_2 , F 为椭圆 C 的一个焦点, 过椭圆 C 的中心 O 的动直线与椭圆 C 相交于点 P, Q , 则
- A. $|PQ|$ 的最小值为 2
B. $\triangle PFQ$ 的面积的最大值为 $2\sqrt{3}$
C. 当点 P 与 A_1, A_2 两点都不重合时, 直线 PA_1, PA_2 的斜率之积为定值
D. 设线段 PQ 的一个三等分点为 M , 则点 M 的轨迹方程为 $9x^2 + 36y^2 - 4 = 0$
11. 已知函数 $f(x) = x^2 - 8|\ln x|$, 则
- A. $f(x)$ 的极小值大于 -4
B. $f(x)$ 有且仅有 3 个零点
C. 当 $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 时, 必有 $f(\sin \alpha) < f(\cos \alpha)$
D. 方程 $f[f(x)] = \frac{1}{2}$ 有 5 个相异实数根

三、填空题: 本大题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分。

12. 已知平面向量 $a = (1, 1), b = (-1, 2)$, 且 $(\lambda a - b) \perp b$, 则实数 $\lambda =$ _____.
13. 甲、乙两位同学从 7 部电影中各自随机选看 2 部, 两人选择独立互不影响, 则两人选看的电影中, 最多有 1 部相同的选法共有 _____ 种.

14. 如图,在四边形 $ABCD$ 中, $AB=5$, $BC=3$, $CD=4$, $\angle ABC = \angle BCD = 120^\circ$, 则 $AC =$ _____, $\triangle ACD$ 的面积为 _____.



四、解答题:本大题共 5 小题,共 77 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分)

为了了解学生是否经常参加体育锻炼,某校随机抽取了 400 人进行调查,整理数据得到如下列联表:

性别	锻炼频次		合计
	不经常	经常	
男	50	200	250
女	50	100	150
合计	100	300	400

(1) 从这 400 名样本学生中随机选取 1 名学生,在选到男生的情况下,求该学生经常锻炼的概率;

(2) 根据小概率值 $\alpha = 0.01$ 的独立性检验,能否认为性别因素与是否经常锻炼有关联?

附表及公式:

$$\text{附: } \chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)},$$

$P(\chi^2 \geq \alpha)$	0.05	0.01	0.001
α	3.841	6.635	10.828

16. (15 分)

已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x - \frac{\pi}{6})$ ($\omega > 0$) 的最小正周期为 π .

(1) 若 $\alpha \in (\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3})$, $f(\alpha) = \frac{6}{5}$, 求 $\sin(\alpha - \frac{\pi}{12})$ 的值;

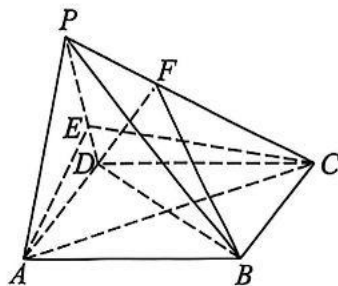
(2) 将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位,再向上平移 2 个单位,得到的图象对应函数记为 $g(x)$,求函数 $y = g(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ 上的值域.

17. (15分)

如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是菱形, E, F 分别是棱 PD, PC 上的点, $BF \parallel$ 平面 ACE , 且 $2PE = 3ED$.

(1) 求证: $PF = \frac{1}{2}FC$;

(2) 若 $\triangle PAD$ 是正三角形, $AD = 6$, $\angle DAB = 60^\circ$, 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 求二面角 $D-BF-C$ 的正弦值.



18. (17分)

在直角坐标系 xOy 中, 设 F 为抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点, M 为抛物线 C 上位于第一象限内的点. 当 $\vec{FO} \cdot \vec{FM} = 0$ 时, 有 $|\vec{FO} - \vec{FM}| = \sqrt{5}$.

(1) 求抛物线 C 的方程;

(2) 设直线 FM 与抛物线 C 的另一个交点为 N , 点 M, N 在直线 $x = -1$ 上的射影分别为点 M', N' , 过点 F 且与 FM 垂直的直线与直线 $x = -1$ 相交于点 P , 证明: P 是线段 $M'N'$ 的中点;

(3) 设过定点 $(6, -4)$ 的直线 l 与抛物线 C 交于 A, B 两点. 若 $\vec{FO} \cdot \vec{FM} = -3$, 且 A, B 两点的横坐标均与点 M 的横坐标不相等, 试判断直线 MA, MB 的斜率之积是否为定值. 如果是定值, 请求出该定值; 如果不是定值, 请求出其取值范围.

19. (17分)

已知函数 $f(x) = ae^{2x} + (a-2)e^x - x$.

(1) 当 $a = 2$ 时, 过点 $(0, m)$ 可以作曲线 $y = f(x)$ 两条切线, 求实数 m 的取值范围;

(2) 若 $f(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 (其中 $x_1 < x_2$),

(i) 求实数 a 的取值范围;

(ii) 求证: $\frac{2-2a}{1+a} < x_2 < \frac{9-6a}{6a-2a^2}$.