

2026 届高三数学试题参考答案

题序	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
答案	A	C	D	B	C	A	D	C	BCD	ABD	AC	3	(2,8)	$(-2e, 0] \cup \left\{\frac{6}{e^3}\right\}$

【评分细则】

【1】第 1~8 题, 凡与答案不符的均不得分.

【2】第 9, 10 题, 全部选对的得 6 分, 每选对一个得 2 分, 有选错的不得分; 第 11 题, 全部选对的得 6 分, 每选对一个得 3 分, 有选错的不得分.

【3】第 12~14 题, 凡与答案不符的均不得分.

1. A 【解析】本题考查集合的补集, 考查数学运算的核心素养.

由题意可得 $A = \{0, 3\}$, 则 $2 \notin A, 3 \in A, 5 \notin A, 7 \notin A$, 故选 A.

2. C 【解析】本题考查命题的否定, 考查逻辑推理的核心素养.

命题“ $\triangle ABC$ 的内角都大于 60° ”的否定是“ $\triangle ABC$ 中至少有一个内角不大于 60° ”.

3. D 【解析】本题考查三角函数图象的平移, 考查逻辑推理的核心素养.

因为 $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left[2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{3}\right]$, 所以为了得到函数 $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象,

只需要将函数 $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度.

4. B 【解析】本题考查函数的定义域, 考查数学抽象与数学运算的核心素养.

由 $x \in \left(0, \frac{5}{2}\right)$, 得 $2x \in (0, 5)$, 则 $f(x)$ 的定义域为 $(0, 5)$. 由 $\begin{cases} 0 < x-1 < 5, \\ x-2 \geq 0, \end{cases}$ 得 $2 \leq x < 6$, 则 $g(x)$ 的定义域为 $[2, 6)$.

5. C 【解析】本题考查充要条件、函数的极值, 考查数学运算与逻辑推理的核心素养.

$f'(x) = 3ax^2 - 2x + 1$, 当 $a = 0$ 时, $f(x)$ 显然有极值; 当 $a \neq 0$ 时, 若 $f(x)$ 有极值, 则 $\Delta = 4 - 12a > 0$ 且 $a \neq 0$, 则 $a < \frac{1}{3}$ 且 $a \neq 0$. 综上, 当 $f(x)$ 有极值时, $a < \frac{1}{3}$.

6. A 【解析】本题考查分段函数的单调性, 考查逻辑推理的核心素养与分类讨论的数学思想.

当 $f(x)$ 为增函数时, $\begin{cases} a > 1, \\ 2a - 1 > 0, \\ 1 + 5a \geq 2, \end{cases}$ 解得 $a > 1$; 当 $f(x)$ 为减函数时, $\begin{cases} 0 < a < 1, \\ 2a - 1 < 0, \\ 1 + 5a \leq 2, \end{cases}$ 解得 $0 < a \leq \frac{1}{5}$. 综上, a 的取值范围为 $\left(0, \frac{1}{5}\right] \cup (1, +\infty)$.

7. D 【解析】本题考查三角恒等变换, 考查数学运算与逻辑推理的核心素养.

因为 $\sin^2 \alpha + 4 \sin 2\alpha = 4$, 所以 $\frac{\sin^2 \alpha + 8 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = 4$, 所以 $\frac{\tan^2 \alpha + 8 \tan \alpha}{\tan^2 \alpha + 1} = 4$, 即 $3 \tan^2 \alpha -$

$$8 \tan \alpha + 4 = 0, \text{ 即 } (3 \tan \alpha - 2)(\tan \alpha - 2) = 0, \text{ 解得 } \tan \alpha = \frac{2}{3} \text{ 或 } \tan \alpha = 2, \text{ 则 } \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \alpha + 1}{1 - \tan \alpha} = 5 \text{ 或 } \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = -3.$$

8. C 【解析】本题考查基本不等式,考查逻辑推理的核心素养.

$$\begin{aligned} \text{因为 } a > |b| > 0, \text{ 所以 } a - b > 0, 2a + b > 0, \text{ 因为 } \frac{1}{a-b} + \frac{2}{2a+b} = 1, \text{ 所以 } 5a + b &= (a-b) + \\ 2(2a+b) &= [(a-b) + 2(2a+b)]\left(\frac{1}{a-b} + \frac{2}{2a+b}\right) = \frac{2(2a+b)}{a-b} + \frac{2(a-b)}{2a+b} + 5 \geq 9, \text{ 当且仅当 } \\ \frac{2(2a+b)}{a-b} &= \frac{2(a-b)}{2a+b}, \text{ 即 } a = -2b = 2 \text{ 时, 等号成立.} \end{aligned}$$

9. BCD 【解析】本题考查不等式的性质,考查逻辑推理的核心素养.

$$\begin{aligned} \text{由 } a < b < 0, \text{ 得 } a^2 > b^2, \text{ A 不符合题意. 由 } a < b < 0, \text{ 得 } \frac{1}{ab} > 0, \text{ 则 } \frac{1}{a} > \frac{1}{b}, \text{ B 符合题意. 由 } a < b < 0, \\ \text{得 } a^2 > ab > 0, \text{ 则 } \frac{1}{a^2} < \frac{1}{ab}, \text{ C 符合题意. 由 } a < b < 0, \text{ 得 } -\frac{1}{ab} < 0, \text{ 则 } -\frac{1}{b} > -\frac{1}{a}, \text{ 所以 } a - \\ \frac{1}{a} < b - \frac{1}{b}, \text{ 即 } a + \frac{1}{b} < b + \frac{1}{a}, \text{ D 符合题意.} \end{aligned}$$

10. ABD 【解析】本题考查抽象函数,考查数学抽象的核心素养.

$$\begin{aligned} \text{令 } x = y = 0, \text{ 得 } f(0) = 1, \text{ A 正确. 令 } x = y = 2, \text{ 得 } f(4) = f(2) + f(2) - 1, \text{ 则 } f(2) = 3. \text{ 令 } x \\ = y = 1, \text{ 得 } f(2) = f(1) + f(1) - 1, \text{ 则 } f(1) = 2, \text{ B 正确. } \forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}, \text{ 且 } x_1 < x_2, \text{ 则 } f(x_2) \\ - f(x_1) &= f(x_1 + x_2 - x_1) - f(x_1) = f(x_1) + f(x_2 - x_1) - 1 - f(x_1) = f(x_2 - x_1) - 1. \\ \text{因为 } x_1 < x_2, \text{ 所以 } x_2 - x_1 > 0, \text{ 所以 } f(x_2 - x_1) > 1, \text{ 即 } f(x_2 - x_1) - 1 > 0, \text{ 则 } f(x_2) > \\ f(x_1), \text{ 故 } f(x) \text{ 是 } \mathbf{R} \text{ 上的增函数, C 错误. 因为 } f(x+y) &= f(x) + f(y) - 1, \text{ 所以 } f(x) = \\ f(x+y) - f(y) + 1, \text{ 则不等式 } f(x^2 - 2) < f(3x) + 4 \text{ 等价于不等式 } f(x^2 - 2) - f(3x) < \\ 4, \text{ 即不等式 } f(x^2 - 3x - 2) < 5. \text{ 因为 } f(4) = 9, \text{ 所以 } f(2) = 5, \text{ 则不等式 } f(x^2 - 3x - 2) < 5 \\ \text{等价于不等式 } f(x^2 - 3x - 2) < f(2). \text{ 因为 } f(x) \text{ 是 } \mathbf{R} \text{ 上的增函数, 所以 } x^2 - 3x - 2 < 2, \text{ 即 } \\ x^2 - 3x - 4 < 0, \text{ 解得 } -1 < x < 4, \text{ D 正确.} \end{aligned}$$

11. AC 【解析】本题考查三角函数的单调性,考查逻辑推理的核心素养与分类讨论的数学思想.

$$\begin{aligned} \text{令 } 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2\omega x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbf{Z}), \text{ 解得 } \frac{k\pi}{\omega} - \frac{\pi}{3\omega} \leq x \leq \frac{k\pi}{\omega} + \frac{\pi}{6\omega} \quad (k \in \mathbf{Z}). \text{ 因为 } f(x) \text{ 在} \\ \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right] \text{ 上单调递增, 所以 } \begin{cases} \frac{k\pi}{\omega} - \frac{\pi}{3\omega} \leq \frac{\pi}{4}, \\ \frac{k\pi}{\omega} + \frac{\pi}{6\omega} \geq \frac{\pi}{3}, \end{cases} \text{ 解得 } 4k - \frac{4}{3} \leq \omega \leq 3k + \frac{1}{2} \quad (k \in \mathbf{Z}). \text{ 因为 } f(x) \text{ 在} \\ \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right] \text{ 上单调递增, 且 } \omega > 0, \text{ 所以 } \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \leq \frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{2\omega}, \text{ 所以 } 0 < \omega \leq 6. \text{ 当 } k \leq -1 \text{ 时, } 3k + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$<0, \omega < 0$, 不符合题意; 当 $k=0$ 时, $0 < \omega \leq \frac{1}{2}$, 符合题意; 当 $k=1$ 时, $\frac{8}{3} \leq \omega \leq \frac{7}{2}$, 符合题意;
当 $k \geq 2$ 时, $4k - \frac{4}{3} > 6$, 不符合题意. 综上, ω 的取值范围是 $(0, \frac{1}{2}] \cup [\frac{8}{3}, \frac{7}{2}]$. 故选 AC.

12.3 【解析】本题考查对数的运算, 考查数学运算的核心素养.

$$\frac{1}{2} \lg \frac{1}{9} + \lg 3\,000 = \lg \sqrt{\frac{1}{9}} + \lg 3\,000 = \lg \left(\frac{1}{3} \times 3\,000 \right) = \lg 1\,000 = 3.$$

13. (2, 8) 【解析】本题考查命题的真假与存在性问题, 考查逻辑推理的核心素养.

$$\text{由} \begin{cases} 1+2 > \frac{a}{x} - 1, \\ 1 + \frac{a}{x} - 1 > 2, \end{cases} \text{得} \begin{cases} a < 4x, \\ a > 2x. \end{cases} \text{依题意可得存在 } x \in [1, 2], \text{使得以 } 1, 2, \frac{a}{x} - 1 \text{ 为边长的三条}$$

线段能构成三角形, 所以 $\begin{cases} a < (4x)_{\max}, \\ a > (2x)_{\min}, \end{cases}$ 所以 $\begin{cases} a < 8, \\ a > 2, \end{cases}$ 即 $2 < a < 8$.

14. $(-2e, 0] \cup \left\{ \frac{6}{e^3} \right\}$ 【解析】本题考查函数的零点与导数, 考查逻辑推理与直观想象的核心素养.

令 $f(x) = ae^x - x^2 + 3 = 0$, 得 $a = \frac{x^2 - 3}{e^x}$. 设 $g(x) = \frac{x^2 - 3}{e^x}$, 则 $g'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 3}{e^x} = -\frac{(x+1)(x-3)}{e^x}$. 当 $x < -1$ 或 $x > 3$ 时, $g'(x) < 0$, 则 $g(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 和 $(3, +\infty)$ 上单调递减; 当 $-1 < x < 3$ 时, $g'(x) > 0$, 则 $g(x)$ 在 $(-1, 3)$ 上单调递增. 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $g(x) \rightarrow +\infty$. 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $g(x) \rightarrow 0$, 且 $g(x) > 0$. 因为 $g(-1) = -2e$, $g(3) = \frac{6}{e^3}$, 所以 $-2e < a \leq 0$ 或 $a = \frac{6}{e^3}$.

15. 【解析】本题考查解三角形, 考查数学运算的核心素养.

解: (1) 因为 $5a \sin B = 3b$, 所以 $5b \sin A = 3b$, 则 $\sin A = \frac{3}{5}$ 2 分

因为 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$, 所以 $\cos^2 A = 1 - \sin^2 A = \frac{16}{25}$ 3 分

因为 $0 < A < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\cos A > 0$, 则 $\cos A = \frac{4}{5}$ 5 分

(2) 因为 $\triangle ABC$ 的面积为 3, 所以 $\frac{1}{2}bc \sin A = \frac{3}{10}bc = 3$, 则 $bc = 10$ 7 分

由余弦定理可得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = (b+c)^2 - 2bc(1 + \cos A)$, 8 分

则 $(b+c)^2 = a^2 + 2bc(1 + \cos A)$ 9 分

因为 $a = 6\sqrt{3}$, $bc = 10$, $\cos A = \frac{4}{5}$, 所以 $(b+c)^2 = (6\sqrt{3})^2 + 2 \times 10 \times \left(1 + \frac{4}{5}\right) = 144$, 10 分

则 $b+c=\sqrt{144}=12$, 11 分

故 $\triangle ABC$ 的周长为 $a+b+c=6\sqrt{3}+12$ 13 分

【评分细则】

【1】第(1)问中,求 $\sin A$ 的值还可以这样解答:

因为 $5a \sin B = 3b$, 所以 $\frac{a}{3} = \frac{b}{\sin B}$ 1 分

由正弦定理可得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, 则 $\sin A = \frac{3}{5}$ 2 分

【2】第(2)问写出三角形的面积公式,得 1 分.

16. 【解析】本题考查三角恒等变换与三角函数的性质及不等式恒成立问题,考查数学运算与逻辑推理的核心素养.

解:(1)由题意可得 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{3} \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 2 分

令 $2x - \frac{\pi}{6} = k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 3 分

解得 $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$, 即 $f(x)$ 图象的对称中心的坐标为 $\left(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, 0\right) (k \in \mathbf{Z})$ 5 分

(2)因为 $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}\right]$, 所以 $2x - \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}\right]$ 6 分

当 $2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, 即 $x = \frac{\pi}{3}$ 时, $f(x)$ 取得最大值, 最大值为 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$; 7 分

当 $2x - \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$, 即 $x = \frac{2\pi}{3}$ 时, $f(x)$ 取得最小值, 最小值为 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -1$ 8 分

故 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 上的值域为 $[-1, 2]$ 9 分

(3)设 $t = f(x)$, 由(2)可知 $t \in [-1, 2]$ 10 分

因为对任意的 $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}\right]$, 不等式 $[f(x)]^2 - mf(x) - 6 \leq 0$ 恒成立等价于对任意的 $t \in$

$[-1, 2]$, 不等式 $t^2 - mt - 6 \leq 0$ 恒成立, 11 分

所以 $\begin{cases} (-1)^2 - m \times (-1) - 6 \leq 0, \\ 2^2 - 2m - 6 \leq 0, \end{cases}$ 13 分

解得 $-1 \leq m \leq 5$, 即 m 的取值范围是 $[-1, 5]$ 15 分

【评分细则】

【1】第(1)问中, $f(x)$ 的化简过程还可以这样写:

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x + \sqrt{3} \left(\frac{1}{2} \sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x \right) = \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = 2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right).$$

【2】第(2)问还可以这样解答：

因为 $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}\right]$, 所以 $2x - \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}\right]$, 6 分

所以 $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$, 8 分

故 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 上的值域为 $[-1, 2]$ 9 分

【3】第(3)问也可以根据 m 的取值范围, 分段讨论, 从而得到 m 的取值范围.

17. 【解析】本题考查函数解析式与最小值及不等式的解法, 考查分类讨论的数学思想.

解: (1) 设函数 $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$,

则 $f(x+1) = a(x+1)^2 + b(x+1) + c = ax^2 + (2a+b)x + a+b+c$,

所以 $f(x+1) - f(x) = 2ax + a + b$ 1 分

因为 $f(x+1) - f(x) = 2x + 1$, 所以 $\begin{cases} 2a = 2, \\ a + b = 1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = 1, \\ b = 0. \end{cases}$ 3 分

因为 $f(1) = -4$, 所以 $1 + c = -4$, 解得 $c = -5$ 4 分

故 $f(x) = x^2 - 5$ 5 分

(2) 由(1)可得 $g(x) = (2^x + 2^{-x})^2 - 2m(2^x + 2^{-x}) - 5$.

① 当 $m = \frac{1}{4}$ 时, $g(x) = (2^x + 2^{-x})^2 - \frac{1}{2}(2^x + 2^{-x}) - 5$, 6 分

则 $(2^x + 2^{-x})^2 - \frac{1}{2}(2^x + 2^{-x}) - 5 > 0$, 即 $\left(2^x + 2^{-x} - \frac{5}{2}\right)(2^x + 2^{-x} + 2) > 0$, 7 分

所以 $2^x + 2^{-x} > \frac{5}{2}$, 所以 $2 \cdot (2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 2 > 0$, 所以 $2^x > 2$ 或 $2^x < \frac{1}{2}$, 8 分

解得 $x > 1$ 或 $x < -1$, 即不等式 $g(x) > 0$ 的解集是 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ 9 分

② 设 $t = 2^x + 2^{-x} \geq 2$, 当且仅当 $x = 0$ 时, 等号成立,

设函数 $h(t) = t^2 - 2mt - 5 (t \geq 2)$ 10 分

当 $m \leq 2$ 时, $h(t)$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调递增, 则 $h(t) \geq h(2) = -4m - 1$.

因为 $g(x)$ 的最小值为 $-6m$, 所以 $-4m - 1 = -6m$, 解得 $m = \frac{1}{2}$ 12 分

当 $m > 2$ 时, $h(t)$ 在 $[2, m)$ 上单调递减, 在 $[m, +\infty)$ 上单调递增, 则 $h(t) \geq h(m) = -m^2 - 5$.

因为 $g(x)$ 的最小值为 $-6m$, 所以 $-m^2 - 5 = -6m$, 即 $m^2 - 6m + 5 = 0$, 解得 $m = 5 (m = 1$ 舍去). 14 分

综上, m 的值为 $\frac{1}{2}$ 或 5. 15 分

【评分细则】

【1】第(1)问中, 未写 $f(x+1) = ax^2 + (2a+b)x + a+b+c$, 直接得到 $f(x+1) - f(x) = 2ax + a + b$, 不扣分.

【2】第(2)①问中,可设 $n=2^x+2^{-x}$,先求出 n 的取值范围,再结合函数 $n=2^x+2^{-x}$ 的单调性,求出 x 的取值范围.

【3】第(2)②问中,未写 $t \geq 2$,扣1分;当 $m \leq 2$ 时,求出 $h(t) \geq h(2) = -4m - 1$,得1分;当 $m > 2$ 时,求出 $h(t) \geq h(m) = -m^2 - 5$,得1分.

18.【解析】本题考查函数的实际应用,考查数学建模与数学运算的核心素养.

解:(1)由题意可得该套餐的总利润 $f(x) = x(348 - 0.2x) - (0.0001x^2 + 0.1x + 60)x - 50000$,即 $f(x) = -0.0001x^3 - 0.3x^2 + 288x - 50000 (100 \leq x \leq 800, x \in \mathbf{Z})$ 3分

(2)由题意得当套餐销售量为 x 套时,总成本 $g(x) = (0.0001x^2 + 0.1x + 60)x + 50000 = 0.0001x^3 + 0.1x^2 + 60x + 50000$ 5分

易证 $g(x)$ 在 $[100, 800]$ 上单调递增, 6分

且 $g(300) = 0.0001 \times 300^3 + 0.1 \times 300^2 + 60 \times 300 + 50000 = 79700$, 8分

则由 $g(x) \leq 79700$,得 $x \leq 300$, 9分

故 $p(x) = 348 - 0.2x \geq 288$,即该套餐售价的最小值为288元. 10分

(3)由(1)可知 $f(x) = -0.0001x^3 - 0.3x^2 + 288x - 50000 (100 \leq x \leq 800)$,

则 $f'(x) = -0.0003x^2 - 0.6x + 288 = -0.0003(x-400)(x+2400) (100 \leq x \leq 800)$.

..... 12分

由 $f'(x) < 0$,得 $400 < x \leq 800$,则 $f(x)$ 在 $(400, 800]$ 上单调递减, 13分

由 $f'(x) > 0$,得 $100 \leq x < 400$,则 $f(x)$ 在 $[100, 400)$ 上单调递增, 14分

故 $f(x)_{\max} = f(400) = 10800$ 15分

故当该套餐售价为 $348 - 0.2 \times 400 = 268$ 元时,总利润最大,且最大值为1.08万元.

..... 17分

【评分细则】

【1】第(1)问中,未写 $100 \leq x \leq 800, x \in \mathbf{Z}$,扣1分.

【2】第(2)问中,写出 $g(x) = (0.0001x^2 + 0.1x + 60)x + 50000$,得1分.

【3】第(3)问中,求出 $f'(x) = -0.0003x^2 - 0.6x + 288$,得1分.

19.【解析】本题考查导数,考查逻辑推理的核心素养.

解:(1)当 $a=2$ 时, $f(x) = 2e^x - x$,则 $f'(x) = 2e^x - 1$, 1分

从而 $f'(0) = 1, f(0) = 2$, 3分

故所求切线方程为 $y = x + 2$ 4分

(2)由 $f(x) \ln x < x \ln \frac{a}{x} + x^2$,得 $(ae^x - x) \ln x < x \ln \frac{a}{x} + x^2$,即 $ae^x \ln x < x \ln a + x^2$, ...

..... 5分

所以 $\frac{\ln x}{x} < \frac{\ln a + x}{ae^x} = \frac{\ln(ae^x)}{ae^x}$ 6分

设 $g(x) = \frac{\ln x}{x}$, 则 $g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, 7 分

当 $0 < x < e$ 时, $g'(x) > 0$, 则 $g(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增.

当 $x > e$ 时, $g'(x) < 0$, 则 $g(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减. 8 分

若 $ae^x \geq 1 > x$, 则 $g(ae^x) \geq g(1) = 0 > g(x)$; 10 分

若 $0 < ae^x < 1$, 因为 $g(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 所以由 $\frac{\ln x}{x} < \frac{\ln(ae^x)}{ae^x}$, 得 $ae^x > x$ 12 分

综上, $ae^x > x$ 对任意的 $x \in (0, 1)$ 恒成立, 即 $a > \frac{x}{e^x}$ 对任意的 $x \in (0, 1)$ 恒成立. 13 分

设 $h(x) = \frac{x}{e^x}$ ($0 < x < 1$), 则 $h'(x) = \frac{1-x}{e^x} > 0$, 所以 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 15 分

所以 $h(x) < h(1) = \frac{1}{e}$, 所以 $a \geq \frac{1}{e}$, 即 a 的取值范围是 $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$ 17 分

【评分细则】

【1】第(1)问中, 所求切线方程还可写为 $x - y + 2 = 0$.

【2】第(2)问中, 直接由 $f(x) \ln x < x \ln \frac{a}{x} + x^2$, 得到 $\frac{\ln x}{x} < \frac{\ln a + x}{ae^x} = \frac{\ln(ae^x)}{ae^x}$, 没有中间过程, 不扣分; 求出 $h'(x) = \frac{1-x}{e^x} > 0$, 得 1 分; 得到 $h(x) < h(1) = \frac{1}{e}$, 得 1 分.

【3】第(2)问中, a 的取值范围写为 $a \geq \frac{1}{e}$, 不扣分.