绵阳南山中学实验学校高 2023 级高三（上）10 月月考试题

数学参考答案及评分标准

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
答案	B	A	B	D	B	C	D	A	ACD	ABD	AD

12. 2　　　13. $\dfrac{24}{25}$　　　14. $\left[0,\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right]$

8.【解析】设等差数列$\{a_{n+1}-a_n\}$的公差为d，且$d\neq 0$，则$a_{n+1}-a_n=dn+c_1$，

$\therefore a_n=a_1+\left[d+2d+\cdots+(n-1)d\right]+(n-1)c_1=a_1+\dfrac{n(n-1)d}{2}+(n-1)c_1$，

$\therefore \dfrac{a_n}{a_{n+1}-a_n}=\dfrac{a_1+\dfrac{n(n-1)d}{2}+(n-1)c_1}{dn+c_1}$，

$\because \left\{\dfrac{a_n}{a_{n+1}-a_n}\right\}$为等差数列，$\therefore \dfrac{a_n}{a_{n+1}-a_n}=d_1n+c_2$，（且$d_1$为公差）

$\therefore \dfrac{d}{2}n^2+\left(c_1-\dfrac{d}{2}\right)n+a_1-c_1=dd_1n^2+\left(c_1d_1+c_2d\right)n+c_1c_2$，

$\therefore \dfrac{d}{2}=dd_1$，$\because d\neq 0$，$\therefore d_1=\dfrac{1}{2}$.故选：A.

11.【解析】令$x=y=2$，可得$\dfrac{2\times 2}{f(4)}=\dfrac{2}{f(2)}+\dfrac{2}{f(2)}=\dfrac{4}{f(2)}$，所以$f(4)=f(2)$，A 选项正确；

令$x=y=1$，可得$\dfrac{1\times 1}{f(1)}=\dfrac{1}{f(1)}+\dfrac{1}{f(1)}$，所以$\dfrac{1}{f(1)}=0$不成立，所以$f(x)$的定义域不是$(0,+\infty)$，B 选项不正确；

因为$\dfrac{x\cdot y}{f(xy)}=\dfrac{x}{f(x)}+\dfrac{y}{f(y)}$，所以$\dfrac{x}{f(x)}=t\ln x$，$f(x)=\dfrac{x}{t\ln x}$，

因为$f(2)=f(4)$，所以$f(2)=\dfrac{2}{t\ln 2}=\dfrac{4}{t\ln 4}$，$t=1$，$f'(x)=\dfrac{t\ln x-t}{(t\ln x)^2}=\dfrac{t(\ln x-1)}{(t\ln x)^2}$，

当$x\in[4,+\infty)$时，$\ln x\geq\ln 4>0, f'(x)>0$，$f(x)$在$[4,+\infty)$上单调递增，所以 C 选项错误；

若$f(2)=2$，令$x=2^{n-1}, y=2$，可得$\dfrac{2^n}{f(2^n)}=\dfrac{2}{f(2)}+\dfrac{2^{n-1}}{f(2^{n-1})}=1+\dfrac{2^{n-1}}{f(2^{n-1})}$，

所以$\dfrac{2^n}{f(2^n)}-\dfrac{2^{n-1}}{f(2^{n-1})}=1$，所以$\left\{\dfrac{2^n}{f(2^n)}\right\}$为等差数列，

所以$\dfrac{2^n}{f(2^n)}=\dfrac{2}{f(2)}+(n-1)\times 1=n$，则$f(2^n)=\dfrac{2^n}{n}$，D 选项正确；故选：AD.

14.【解析】 $\begin{cases} f(-x)+e^{-2x}=-f(x)-e^{2x} \\ f(-x)+e^{-x}=f(x)+e^{x} \end{cases}$ 解得，$2f(x)=-(e^{2x}+e^{-2x})+e^{-x}-e^{x}$

又因为 $2f(x)=-(e^{2x}+e^{-2x})+e^{-x}-e^{x}=-(e^{-x}-e^{x})^2+(e^{-x}-e^{x})-2=-\left[(e^{-x}-e^{x})-\frac{1}{2}\right]^2-\frac{7}{4}\le-\frac{7}{4}$，

当 $e^{-x}-e^{x}=\frac{1}{2}$ 时取“=”，$f(x)$ 的最大值为 $-\frac{7}{8}$.

15. 【解析】(1) 因为 $2a_{n+1}=a_n+\frac{1}{2^n}$，所以 $2^{n+1}a_{n+1}=2^n a_n+1$，即 $2^{n+1}a_{n+1}-2^n a_n=1$，$n\ge1$.

所以 $\{2^n a_n\}$ 是首项为 $2^1\cdot a_1=1$，公差为1的等差数列 ……………………………4 分

故 $2^n a_n=n$，即 $a_n=\frac{n}{2^n}$.

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\frac{n}{2^n}$ ……………………………7 分

(2) $S_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\dots\dots+\frac{n}{2^n}$，①

$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\dots\dots+\frac{n-1}{2^n}+\frac{n}{2^{n+1}}$，②

由①-②得 $\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots\dots+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}$，

$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots\dots\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}$

所以，$S_n=2-\frac{n+2}{2^n}$ ……………………………13 分

16. 【解析】(1) $f(x)=4\cos\omega x\cos\left(\omega x-\frac{\pi}{3}\right)=4\cos\omega x\left(\cos\omega x\cos\frac{\pi}{3}+\sin\omega x\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$=2\cos^2\omega x+2\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x f(x)=2\times\frac{1+\cos 2x}{2}+\sqrt{3}\sin 2x=\sqrt{3}\sin 2\omega x+\cos 2\omega x+$

$=2\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{6}\right)+1$ ……………………………3 分

由 $\frac{2\pi}{2\omega}=\pi$，得到 $\omega=1$ ……………………………4 分

当 $2x+\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，即 $x=k\pi+\frac{\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，……………………………6 分

函数 $f(x)$ 取得最大值，最大值为3；……………………………7 分

(2) 函数 $f(x)$ 图象上所有点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$，纵坐标不变，可得函数 $y=2\sin\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)+1$ 的图象，

再将函数 $y=2\sin\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)+1$ 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，得到 $g(x)$ 的图象，

$g(x)=2\sin\left[4\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{6}\right]+1=2\sin\left(4x-\frac{\pi}{2}\right)+1=-2\cos 4x+1$ ，　　　　……………………………10 分

令 $g(x)=0$ 得到 $\cos 4x=\frac{1}{2}$，解得 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}$ 或 $x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12}$ $k\in\mathbf{Z}$，　　　　……………………………12 分

当 $k=0$ 时，$x=-\frac{\pi}{12}$ 或 $x=\frac{\pi}{12}$，当 $k=1$ 时，$x=\frac{5\pi}{12}$ 或 $x=\frac{7\pi}{12}$

当 $k=2$ 时，$x=\frac{11\pi}{12}$ 或 $x=\frac{13\pi}{12}$.

要使 $g(x)$ 在区间 $[0,m]$ 上有且仅有 3 个零点，$\frac{7\pi}{12}\le m<\frac{11\pi}{12}$　　　　……………………………15 分

17. 【解析】（1）依题意得 $f'(x)=e^x-a+x(e^x-a)=(x+1)(e^x-a)$.

①当 $a\le 0$ 时，$e^x-a>0$，令 $f'(x)<0$，得 $x<-1$，令 $f'(x)>0$，得 $x>-1$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减，在和 $(-1,+\infty)$ 上单调递增.

②当 $0<a<\frac{1}{e}$ 时，令 $f'(x)<0$，得 $\ln a<x<-1$，令 $f'(x)>0$，得 $x<\ln a$ 或 $x>-1$，

所以 $f(x)$ 在 $(\ln a,-1)$ 上单调递减，在 $(-\infty,\ln a)$ 和 $(-1,+\infty)$ 上单调递增.

③当 $a=\frac{1}{e}$ 时，$f'(x)\ge 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增；

④当 $a>\frac{1}{e}$ 时，令 $f'(x)<0$，得 $-1<x<\ln a$，令 $f'(x)>0$，得 $x<-1$ 或 $x>\ln a$，

所以 $f(x)$ 在 $(-1,\ln a)$ 上单调递减，在 $(-\infty,-1)$ 和 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增.

所以当 $a=\frac{1}{e}$ 时，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增；

当 $a>\frac{1}{e}$ 时，$f(x)$ 在 $(-1,\ln a)$ 上单调递减，在 $(-\infty,-1)$ 和 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增. …………………………8 分

（2）当 $x\in[0,+\infty)$ 时，不等式 $x\left(e^x-\frac{a}{2}x-a\right)\ge-\frac{a}{2}\left(x^2+4x\right)-e$ 恒成立，

即不等式 $xe^x+ax+e\ge 0$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 上恒成立，

当 $x=0$ 时，不等式 $e\ge 0$ 显然成立，此时 $a\in R$；

当 $x>0$ 时，$xe^x+ax+e\ge 0$ 即 $-a\le e^x+\frac{e}{x}$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立，

令 $h(x)=e^x+\frac{e}{x},x>0$，则 $h'(x)=e^x-\frac{e}{x^2}$，

令 $m(x)=h'(x)=e^x-\frac{e}{x^2}$，则 $m'(x)=e^x+\frac{2e}{x^3}>0$，

所以 $h'(x)=e^x-\frac{e}{x^2}$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上单调递增，注意到 $h'(1)=e-\frac{e}{1}=0$，

所以当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)<0$，此时 $h(x)$ 单调递减，

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，此时 $h(x)$ 单调递增，

所以 $h(x)$ 在 $x=1$ 时取到最小值为 $h(1)=\mathrm{e}+\frac{\mathrm{e}}{1}=2\mathrm{e}$，

所以 $-a\le 2\mathrm{e}$，所以 $a\ge -2\mathrm{e}$，

综上，a 的取值范围为 $[-2\mathrm{e},+\infty)$．　…………………………15 分

18．【解析】（1）当 $n=1$ 时，$\frac{1}{a_1-1}=\frac{1}{2}$，解得 $a_1=3$，

当 $n\ge 2$ 时，$\frac{1}{a_n-1}=(\frac{1}{a_1-1}+\frac{1}{a_2-1}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n-1})-(\frac{1}{a_1-1}+\frac{1}{a_2-1}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_{n-1}-1})=\frac{n}{n+1}-\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n(n+1)}$，

化简得：$a_n=n^2+n+1(n\ge 2)$，　…………………………4 分

经检验得，$n=1$ 时也满足，故 $a_n=n^2+n+1$．　…………………………5 分

（2）（i）证明：由题意可知：$A_n(n^2+n+1,1)$，则 $\tan\alpha_n=\frac{1}{n^2+n+1}$, $\tan\beta_n=\frac{1}{n}$，

因为 $\tan(\beta_n-\beta_{n+1})=\dfrac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{n^2+n+1}=\tan\alpha_n$，

且 $\beta_n-\beta_{n+1}\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right),\alpha_n\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，所以 $\beta_n-\beta_{n+1}=\alpha_n$，即 $\beta_n=\alpha_n+\beta_{n+1}$

所以，$\tan(\alpha_n+\beta_{n+1})=\tan\beta_n$　…………………………12 分

（ii）证明：（i）由题意可知：$\beta_n-\beta_{n+1}=\alpha_n$

$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n+\beta_{n+1}=(\beta_1-\beta_2)+(\beta_2-\beta_3)+\cdots+(\beta_n-\beta_{n+1})+\beta_{n+1}=\beta_1$．

因为 $\tan\beta_1=1$，则 $\beta_1=\frac{\pi}{4}$，所以 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n+\beta_{n+1}=\frac{\pi}{4}$．　…………………………17 分

19．【解析】（1）$f(x)=x-\sin x,[0,+\infty)$，求导可得 $f'(x)=1-\cos x\ge 0$，

所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)_{\min}=f(0)=0$　…………………………4 分

（2）（i）$g(x)=\ln(1+2x)-a\sin 2x$，其中 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),a\in[1,+\infty)$，

则 $g(0)=0$，$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\ln(1+\pi)>0, g'(x)=\frac{2}{1+2x}-2a\cos 2x$，

当 $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$\frac{2}{1+2x}>0,\cos 2x\le 0$，由 $a\ge 1$ 知，$g'(x)=\frac{2}{1+2x}-2a\cos 2x>0$ 成立，

所以 $g'(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ 上无零点，即 $g(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ 上无极值点.

当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 时，令 $m(x)=g'(x)=\frac{2}{1+2x}-2a\cos 2x$，

则 $m'(x)=\frac{-4}{(1+2x)^2}+4a\sin 2x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递增，$m'(0)=-4<0$，

由 $a\ge 1$ 知，$m'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-4}{\left(1+\frac{\pi}{2}\right)^2}+4a>0$，

所以 $\exists k\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 使得 $m'(k)=0$，当 $0<x<k$ 时，$m'(x)<0$，即 $g'(x)$ 单调递减，

所以 $g'(k)<g'(0)=2-2a\le 0$；

当 $k<x<\frac{\pi}{4}$ 时，$m'(x)>0$，即 $g'(x)$ 单调递增，

因为 $g'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2}{1+\frac{\pi}{2}}>0$，所以 $\exists x_1\in\left(k,\frac{\pi}{4}\right)$，使得 $g'(x_1)=0$，

当 $0<x<x_1$ 时，$g'(x)<0, g(x)$ 单调递减；

当 $x_1<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$g'(x)>0, g(x)$ 单调递增，

所以 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上存在唯一极小值点 x_1.

故 $g(x_1)<g(0)=0$，又因为 $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\ln(1+\pi)>0$，

所以存在 $x_0\in\left(x_1,\frac{\pi}{2}\right)$ 使得 $g(x_0)=0$，

所以 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上存在唯一零点 x_0，得证. …………………………10 分

（ii）由（i）知 $x_1<x_0$ 成立，下面证明 $x_0<2x_1$.

由（i）知 $x_1\in\left(k,\frac{\pi}{4}\right)$，所以 $2x_1\in\left(x_1,\frac{\pi}{2}\right)$，

因为 $g(x)$ 在 $\left(x_1,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，要证 $x_0<2x_1$，只需要证明 $g(2x_1)>g(x_0)=0$.

因为 $g(x)=\ln(1+2x)-a\sin 2x$，所以 $g(2x_1)=\ln(1+4x_1)-a\sin 4x_1$，

由（i）知 $g'(x_1)=\frac{2}{1+2x_1}-2a\cos 2x_1=0$，得 $a=\frac{1}{(1+2x_1)\cos 2x_1}$，

所以 $g(2x_1)=\ln(1+4x_1)-\frac{2\sin 2x_1}{1+2x_1}$，

由（1）知，当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$x>\sin x$，所以 $g(2x_1)>\ln(1+4x_1)-\frac{4x_1}{1+2x_1}$，

令 $n(x)=\ln(1+4x)-\dfrac{4x}{1+2x}$，其中 $x\in\left(k,\dfrac{\pi}{4}\right)\subseteq\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$，

则 $n'(x)=\dfrac{4}{1+4x}-\dfrac{4(1+2x)-8x}{(1+2x)^2}=\dfrac{16x^2}{(1+4x)(1+2x)^2}>0$ 恒成立，

所以 $n(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ 上单调递增，所以 $n(x)>n(0)=0$，即 $g(2x_1)>0$ 成立，

所以 $g(2x_1)>g(x_0)=0$ 成立，即 $x_0<2x_1$，

综上所述，$x_1<x_0<2x_1$ 得证. ....17 分