绵阳南山中学实验学校高 2023 级高三（上）10 月月考试题

数 学

命题：赵 杰　　　　审题：李果

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效.
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

第Ⅰ卷（选择题，共 58 分）

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 集合 $A=\left\{x\middle|x^3=4x\right\}$，$B=\{-2,1,2\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{-2,0,1,2\}$　　B. $\{-2,2\}$　　C. $\{2\}$　　D. $\{0,1\}$

2. $\tan 300^\circ+\cos 510^\circ$ 的值为

A. $-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$　　B. $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $-\dfrac{1}{2}-\sqrt{3}$　　D. $-\dfrac{5\sqrt{3}}{6}$

3. 已知 $p:x^2-x-20>0$，$q:\log_2(x-5)<2$，则 p 是 q 的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

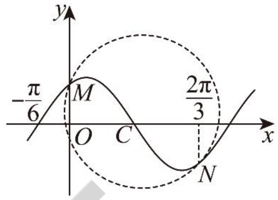
4. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(x+2)=f(x)$，当 $x\in[0,1)$ 时，$f(x)=2^x-1$，则 $f(\log_2\dfrac{1}{3})=$

A. $\dfrac{4}{3}$　　B. 2　　C. $-\dfrac{2}{3}$　　D. $\dfrac{1}{3}$

5. 已知函数 $f(x)=a^x\,(a>0,a\neq 1)$，直线 $y=x$ 与函数 $y=f(x)$ 的图象相切，则 $\ln a=$

A. e　　B. $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$　　C. e^2　　D. 2e

6. 函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,0<\varphi<\pi)$ 的部分图象如图中实线所示，圆 C 与 $f(x)$ 的图象交于 M，N 两点，且 M 在 y 轴上，则下列区间中，函数 $f(x)$ 单调递减的是



A. $\left(-\frac{7\pi}{12},-\frac{\pi}{3}\right)$　　B. $\left(-\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{12}\right)$

C. $\left(-\frac{11\pi}{12},-\frac{5\pi}{12}\right)$　　D. $\left(\frac{\pi}{2},\frac{15\pi}{24}\right)$

7. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2,x\geq a,\\2x+3,x<a\end{cases}$，若 $\exists m\in\mathbf{R}$，方程 $f(x)=m$ 有三个实根，则实数 a 的取值范围是

A. $\left(-\frac{3}{2},-1\right]$　　B. $\left(-\frac{3}{2},-1\right)$　　C. $\left(-\frac{3}{2},0\right]$　　D. $\left(-\frac{3}{2},0\right)$

8. 数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 与数列 $\left\{\frac{a_n}{a_{n+1}-a_n}\right\}$ 都是公差不为零的等差数列，则数列 $\left\{\frac{a_n}{a_{n+1}-a_n}\right\}$ 的公差为

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{5}$　　D. 不确定

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 已知公比为 q 的正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_3=6a_3+1$，$a_2=2$，则

A. $q=\frac{1}{2}$　　B. 数列 $\{a_n\}$ 有最小项

C. 数列 $\{a_n\}$ 为递减数列　　D. $a_n+S_n=8$

10. 下列命题正确的有

A. 若 $a>b>0$，$c<0$，则 $\frac{c}{a}>\frac{c}{b}$

B. 若 $x\in\mathbf{R}$，则 2^x+2^{2-x} 的最小值为 4

C. 已知 x,y 都是正数，且 $x\neq y$，则 $\sqrt{xy}<\frac{2xy}{x+y}$

D. 若 $a,b>0$ 且 $ab=a+b+3$，则 $a+b$ 的取值范围为 $[6,+\infty)$

11. 已知函数 $f(x)$ 满足 $\dfrac{x\cdot y}{f(xy)}=\dfrac{x}{f(x)}+\dfrac{y}{f(y)}$，则下列结论正确的是

A. $f(4)=f(2)$　　B. $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$

C. 若 $f(2)>4$, $f(x)$ 在 $[4,+\infty)$ 上单调递减　　D. 若 $f(2)=2$，则 $f(2^n)=\dfrac{2^n}{n}$

第II卷（非选择题，共 92 分）

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 记等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_{14}=14$, 则 $a_7+a_8=$__________.

13. 若 $\tan\alpha=2$，$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{2}$，则 $\sin 2\beta=$__________.

14. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 **R**，$f(x)+e^{2x}$ 是奇函数，$f(x)+e^{x}$ 是偶函数，则函数 $f(x)$ 的最大值为__________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（13 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=\dfrac{1}{2}$，$2a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{2^n}$.

（1）证明：数列 $\{2^n a_n\}$ 是等差数列，并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

16.（15 分）

已知周期为 π 的函数 $f(x)=4\cos\omega x\cos\left(\omega x-\dfrac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$.

（1）求函数 $f(x)$ 的最大值及相应的 x 的值；

（2）将函数 $f(x)$ 图象上所有点的横坐标缩短为原来的 $\dfrac{1}{2}$，再向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位，得到 $g(x)$ 的图象，若 $g(x)$ 在区间 $[0,m]$ 上有且仅有 3 个零点，求实数 m 的取值范围.

17.（15 分）

设函数 $f(x)=x\left(\mathrm{e}^{x}-\frac{a}{2}x-a\right)$，$a\in\mathbf{R}$.

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $g(x)=-\frac{a}{2}\left(x^{2}+4x\right)-\mathrm{e}$，当 $x\in[0,+\infty)$ 时，不等式 $f(x)\geq g(x)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

18.（17 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{1}{a_1-1}+\frac{1}{a_2-1}+\ldots\ldots+\frac{1}{a_n-1}=\frac{n}{n+1}$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $P(1,0)$，定义点 $A_n(a_n,1)$，$B_n(n,1)$（其中 $n\in\mathrm{N}_+$），记 $\alpha_n=\angle A_nOP$，$\beta_n=\angle B_nOP$．证明：

（i）$\tan(\alpha_n+\beta_{n+1})=\tan\beta_n$；

（ii）$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n+\beta_{n+1}=\frac{\pi}{4}$.

19.（17 分）

已知函数 $f(x)=x-\sin x$，$g(x)=\ln(1+2x)-a\sin 2x(a\geq 1)$.

（1）求 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的最小值；

（2）证明：（i）$g(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上存在极值点 x_1 和零点 x_0；

（ii）对于（i）中的 x_1 和 x_0，满足 $x_1<x_0<2x_1$.