高三年级摸底检测
数学参考答案及评分标准

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1	2	3	4	5	6	7	8
D	A	D	C	D	A	B	C

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求；全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9	10	11
ABC	ACD	ABD

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12．(1,3)　　13．2　　14．2500

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15．（13 分）

解：（1）由已知可得，

$$\begin{cases} S_5 = 5a_1 + 10d = 15, \\ (a_1+2d)^2 = a_1(a_1+8d), \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} a_1 = 1, \\ d = 1, \end{cases}$$ ……………………………4 分

故通项公式为 $a_n = n\ (n \in \mathbf{N}^*)$； ……………………………6 分

（2）由（1）可知 $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$， ……………………………8 分

$$\therefore \frac{1}{S_n} = \frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right),$$ ……………………………10 分

$$\therefore \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \cdots + \frac{1}{S_n} = 2\left[\left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$< 2.$$ ……………………………13 分

16．（15 分）

解：（1）X 的可能取值为 0，1，2，3， ……………………………1 分

$P(X=0) = \dfrac{C_3^0 C_9^4}{C_{12}^4} = \dfrac{14}{55}$，$P(X=1) = \dfrac{C_3^1 C_9^3}{C_{12}^4} = \dfrac{28}{55}$， ……………………………5 分

$P(X=2) = \dfrac{C_3^2 C_9^2}{C_{12}^4} = \dfrac{12}{55}$，$P(X=3) = \dfrac{C_3^3 C_9^1}{C_{12}^4} = \dfrac{1}{55}$， ……………………………9 分

故 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{14}{55}$	$\frac{28}{55}$	$\frac{12}{55}$	$\frac{1}{55}$

……………………………11 分

（2）记事件 $A=$“抽到的4件中至少有1件次品”，事件 $B=$“恰好有2件次品”，

$\therefore P(B\mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{P(X=2)}{P(X\geqslant 1)}=\dfrac{\frac{12}{55}}{1-\frac{14}{55}}=\dfrac{12}{41}$，　　…………………………14分

故恰好有2件次品的概率为 $\dfrac{12}{41}$.　　…………………………15分

17.（15分）

解：（1）由已知可得，

$\begin{cases} m+n=40, \\ m=3n, \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} m=30, \\ n=10; \end{cases}$　　…………………………4分

（2）根据表中数据可知，使用手机≤2小时的40人中有30人学业成绩良好，

故 P 的估计值为 $\dfrac{30}{40}=\dfrac{3}{4}$；　　…………………………8分

（3）零假设为 H_0：周末使用手机时长与学业成绩没有关联，

根据表中数据可得，

$\chi^2=\dfrac{100\times(30\times 40-20\times 10)^2}{50\times 50\times 40\times 60}=\dfrac{50}{3}\approx 16.667>10.828=x_{0.001}$，　　…………………………13分

根据小概率值 $\alpha=0.001$ 的独立性检验，我们推断 H_0 不成立，即周末使用手机时长与学业成绩有关联，此推断犯错误的概率不超过0.001.　　…………………………15分

18.（17分）

解：（1）当 $a=1$ 时，$f(x)=e^x\sin x-x$，

$\therefore f(0)=0$，

又 $\because f'(x)=e^x(\sin x+\cos x)-1$，

$\therefore f'(0)=e^0(0+1)-1=0$，

故切线方程为 $y=0$；　　…………………………4分

（2）$\because f'(x)=e^x(\sin x+\cos x)-a$，

令 $g(x)=e^x(\sin x+\cos x)$，

$\therefore g'(x)=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)=2e^x\cos x$，

当 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 时，$g'(x)\geqslant 0$，故 $g(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上单调递增，

$\therefore g(x)\in[1,e^{\frac{\pi}{2}}]$，

当 $a\geqslant e^{\frac{\pi}{2}}$ 时，$f'(x)\leqslant 0$，$f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上单调递减，　　…………………………7分

当 $a\leqslant 1$ 时，$f'(x)\geqslant 0$，$f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上单调递增，　　…………………………9分

当 $1<a<e^{\frac{\pi}{2}}$ 时，$\exists x_0\in(0,\frac{\pi}{2})$，使得 $f'(x_0)=0$，

故当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $[0,x_0]$ 上单调递减，

当 $x\in(x_0,\frac{\pi}{2})$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $[x_0,\frac{\pi}{2}]$ 上单调递增；　　…………………………11分

（3）$\because f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内恰有两个不同的极值点，

$\therefore f'(x)=0$ 在 $(0,\pi)$ 内恰有两个不同的实根，

故 $y=g(x)$ 的图象与 $y=a$ 在 $(0,\pi)$ 内恰有两个不同的交点，

由（2）可知 $g'(x)=2e^x\cos x$，

当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递增，

当 $x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 上单调递减，

故当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$g(x)\in(1,e^{\frac{\pi}{2}})$，

当 $x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$ 时，$g(x)\in(-e^{\pi},e^{\frac{\pi}{2}})$，

$\therefore g(x)$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处有最大值即 $g(x)_{\max}=g(\frac{\pi}{2})=e^{\frac{\pi}{2}}$，

又 $\because g(0)=1>g(\pi)=-e^{\pi}$，

$\therefore a$ 的取值范围为 $(1,e^{\frac{\pi}{2}})$．　　……………………………17 分

19．（17 分）

解：（1）由已知可得 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{2}$，$c^2=a^2+b^2$，

$\therefore 2a^2=a^2+b^2\Rightarrow b^2=a^2$，

又 $\because$ 双曲线 Γ 过点 $(\sqrt{2},1)$，

$\therefore \frac{2}{a^2}-\frac{1}{b^2}=1$，

$\therefore a^2=1$，$b^2=1$，

$\therefore$ 双曲线 Γ 的标准方程为 $x^2-y^2=1$；　　……………………………4 分

（2）（i）由（1）可知双曲线 Γ 的右焦点为 $(\sqrt{2},0)$，

$\therefore C:y^2=4\sqrt{2}x$，　　……………………………5 分

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}y^2=4\sqrt{2}x,\\ x=my+\sqrt{2}\end{cases}$ 得 $y^2-4\sqrt{2}my-8=0$，

$\because \Delta>0$，

$\therefore y_1+y_2=4\sqrt{2}m$，$y_1y_2=-8$，

$$\therefore |AB|=\sqrt{1+m^2}\,|y_1-y_2|$$

$$=\sqrt{1+m^2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$$

$$=4\sqrt{2}(1+m^2),$$　　……………………………7 分

设 $C(x_3,y_3)$， $D(x_4,y_4)$，

由 $\begin{cases}x^2-y^2=1,\\ x=my+\sqrt{2}\end{cases}$ 得 $(m^2-1)y^2+2\sqrt{2}my+1=0$，

$\because$ 直线 l 与双曲线 Γ 的左、右两支分别交于 C，D 两点，

$\therefore m^2-1\neq 0$， $\Delta>0$，

$y_3+y_4=-\dfrac{2\sqrt{2}m}{m^2-1}$， $y_3y_4=\dfrac{1}{m^2-1}>0$，

$\therefore m^2>1$，

$\therefore |CD|=\sqrt{1+m^2}\,|y_3-y_4|$

$=\sqrt{1+m^2}\sqrt{(y_3+y_4)^2-4y_3y_4}$

$=\dfrac{2(1+m^2)}{m^2-1}$， ……………………………9 分

$\because |AB|=2|CD|$，

$\therefore 4\sqrt{2}(1+m^2)=2\times\dfrac{2(1+m^2)}{m^2-1}$，

$\therefore m^2-1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore m=\pm\sqrt{1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$，

故存在 m 满足条件，且 $m=\pm\sqrt{1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$； ……………………………11 分

（ii）设点 O 到直线 l 的距离为 d，则 $d=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+m^2}}$，

$\therefore S_{\triangle OAB}+4\sqrt{2}S_{\triangle OCD}=\dfrac{1}{2}|AB|d+4\sqrt{2}\times\dfrac{1}{2}|CD|d$

$=\dfrac{1}{2}d(|AB|+4\sqrt{2}|CD|)$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1+m^2}}[4\sqrt{2}(1+m^2)+\dfrac{8\sqrt{2}(1+m^2)}{m^2-1}]$

$=4\sqrt{1+m^2}(1+\dfrac{2}{m^2-1})$， ……………………………13 分

令 $t=\sqrt{1+m^2}$，

由（i）知 $m^2>1$，

$\therefore t>\sqrt{2}$，

$\therefore S_{\triangle OAB}+4\sqrt{2}S_{\triangle OCD}=4t(1+\dfrac{2}{t^2-2})$，

令 $f(t)=4t(1+\dfrac{2}{t^2-2})$，

$\therefore f'(t)=\dfrac{4t^2(t^2-6)}{(t^2-2)^2}=\dfrac{4t^2(t-\sqrt{6})(t+\sqrt{6})}{(t^2-2)^2}$，

故当 $\sqrt{2}<t<\sqrt{6}$ 时， $f(t)$ 单调递减，

当 $t>\sqrt{6}$ 时， $f(t)$ 单调递增，

$\therefore f_{\min}(t)=f(\sqrt{6})=6\sqrt{6}$，

$\therefore S_{\triangle OAB}+4\sqrt{2}S_{\triangle OCD}$ 的最小值为 $6\sqrt{6}$． ……………………………17 分

解析：

1．解：命题 $p:\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2-2x-3\leqslant 0$ 的否定 $\neg p$ 需否定量词和不等式，故选 D.

2．解：$\because \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2}(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})=\frac{1}{2}(2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b})\geqslant\frac{1}{2}(2+2\sqrt{\frac{b}{a}\times\frac{a}{b}})=2$，当且仅当 $\frac{b}{a}=\frac{a}{b}$，即 $a=b=1$ 时取等号，故选 A.

3．解：展开式通项为 $T_{k+1}=C_8^k x^{8-k}(-\frac{1}{x})^k=C_8^k(-1)^k x^{8-2k}$，令 $8-2k=4$，得 $k=2$，故系数为 $C_8^2(-1)^2=28$，故选 D.

4．解：$\because P(X\geqslant 1)=1-P(X=0)=1-(1-p)^4=\frac{65}{81}$，$\therefore p=\frac{1}{3}$，故方差 $D(X)=np(1-p)=4\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{9}$，故选 C.

5．解：选项 A：$r_1=0.92$ 仅表明两者强线性正相关，但机动车保有量增加不一定是 $PM_{2.5}$ 浓度升高的直接原因；

选项 B：$r_2=-0.12$ 表示极弱线性负相关，但仍有轻微关联，且可能存在非线性关系；

选项 C：线性相关强度由 $|r|$ 决定，$|r_3|=0.75<|r_1|=0.92$，故结论一的线性相关性更强；

选项 D：$|r_1|=0.92$ 非常接近 1，表明两者存在极强的线性相关关系；

故选 D.

6．解：$\because$ 数列满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+2^n$，$\therefore a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)=1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k=1+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}=1+2^n-2$ $=2^n-1$，$\therefore a_{10}=2^{10}-1$，故选 A.

7．解：$\because$ 点 P 在平面 A_1BC 内，$\therefore \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+k=1$，$\therefore k=\frac{1}{6}$，故选 B.

8．解：令 $g(x)=e^x$，$h(x)=ax(a>0)$，$\because$ 存在唯一整数 x_0 使 $f(x_0)<0$，即 $e^{x_0}<ax_0$，$\therefore g(x)$ 的图象在 $h(x)$ 的图象下方的部分有且只有一个横坐标为整数的点，又 $\because$ 当 $a=e$ 时，$h(x)=ex$ 为 $g(x)=e^x$ 的切线，切点为 $(1,e)$，$\therefore \begin{cases} g(1)<h(1), \\ g(2)\geqslant h(2) \end{cases}$，$\therefore e<a\leqslant\frac{e^2}{2}$，故选 C.

9．解：选项 A：甲 1 本、乙 2 本、丙 3 本，方案数为 $C_6^1C_5^2C_3^3=60$，故 A 正确；

选项 B：每人 2 本，方案数为 $\frac{6!}{2!2!2!}=90$，故 B 正确；

选项 C：书本数互不相同（即 1，2，3），故方案数为 $C_6^1C_5^2C_3^3A_3^3=360$，故 C 正确；

选项 D：分三类：第一类，每人 2 本，方案数为 90 种；第二类，一人 1 本，一人 2 本，一人 3 本，方案数为 360 种；第三类，一人 4 本，另外两人各 1 本，方案数为 $\frac{C_6^4C_2^1C_1^1}{A_2^2}A_3^3=90$，故总的分配方案数为 $90+360+90=540$ 种，故 D 错误；

故选 ABC.

10．解：$\because$ 圆 C 的方程为 $x^2-4x+y^2-8y=-12$，配方得 $(x-2)^2+(y-4)^2=8$，$\therefore$ 圆心为 $(2,4)$，半径为 $r=2\sqrt{2}$．

选项 A：当 $k=0$ 时，圆心到直线 l 的距离为 $d=\frac{|2-4|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，$\therefore$ 弦长为 $2\sqrt{(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{2})^2}=2\sqrt{6}$，故 A 正确；

选项 B：当 $k=0$ 时，圆心到直线 l 的距离为 $d=\frac{|2-4|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，故圆上的点到直线 l 的最大距离为 $d+r=\sqrt{2}+2\sqrt{2}=3\sqrt{2}$，最小距离为 $|d-r|=\sqrt{2}$，$\because 1<\sqrt{2}$，$\therefore$ 圆上存在 4 个点到直线 l 的距离为 1，故 B 错误；

选项 C：相切时 $d=r$，即 $\frac{|k-2|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}\Rightarrow|k-2|=4$，$k=6$ 或 $k=-2$，$\therefore$ 存在，故 C 正确；

选项 D：相交时 $d<r$，即 $\frac{|k-2|}{\sqrt{2}}<2\sqrt{2}\Rightarrow|k-2|<4$，$-2<k<6$，$\therefore k$ 的取值范围为 $(-2,6)$，故 D 正确；

故选 ACD．

11．解：$f'(x)=3x^2+6mx=3x(x+2m)$．

选项 A：$\because x=0$ 为 $f(x)$ 的极小值点，$\therefore -2m<0$，$\therefore m>0$，故 A 正确；

选项 B：$\because$ 当 $x=0$ 时，$f(x)=3$，当 $m\geqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，此时 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上没有零点；当 $m<0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,-2m)$ 上单调递减，在 $(-2m,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore$ 当 $x=-2m$ 时，$f(x)=x^3+3mx^2+3$ 在 $(0,+\infty)$ 上取得极小值，也是最小值，即 $f(x)_{\min}=f(-2m)=4m^3+3$．$\because f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有且仅有一个零点，$\therefore 4m^3+3=0$，解得 $m=-\frac{\sqrt[3]{6}}{2}$，故 B 正确；

选项 C：当 $m=0$ 时，$f(x)=x^3+3$，设切点 $(x_0,f(x_0))$，则切线斜率 $k=f'(x_0)=3x_0^2$，$\therefore$ 切线方程为 $y-f(x_0)=3x_0^2(x-x_0)$，$\because$ 切线过点 $(0,0)$，则 $-x_0^3-3=-3x_0^3$，$\therefore x_0=\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$，$\therefore$ 有且仅有一条直线与曲线 $y=f(x)$ 相切，故 C 错误；

选项 D：当 $m=-1$ 时，$f(x)=x^3-3x^2+3$，$\therefore f(x)+f(2-x)=2$，$\therefore f(\frac{1}{2025})+f(\frac{2}{2025})+f(\frac{3}{2025})+\cdots+f(\frac{4049}{2025})=4049$，故 D 正确；

故选 ABD．

12．解：$\because A=\{x\,|\,x^2-3x\leqslant 0\}=[0,3]$，$B=\{x\,|\,\log_2(x-1)<1\}=\{x\,|\,0<x-1<2\}=(1,3)$，$\therefore A\cap B=(1,3)$．故答案为 $(1,3)$．

13．解：$\because \overline{x}=4$，$\overline{y}=40$，代入线性回归直线方程为 $40=9.5\times 4+\hat{a}$，解得 $\hat{a}=40-38=2$．故答案为 2．

14．解：由题设知 $a_{n+1}-(-1)^n a_n=n$，当 $n=1$，$a_2+a_1=1$，当 $n=3$ 时，$a_4+a_3=3$，当 $n=5$ 时，$a_6+a_5=5$，$\cdots$，当 $n=99$ 时，$a_{100}+a_{99}=99$，$\therefore \{a_n\}$ 的前 100 项和为 $a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{99}+a_{100}=1+3+5+9+\cdots+99=\frac{50\times 100}{2}=2500$，故答案为 2500．