高三年级摸底检测

数　学

考试时间 120 分钟，满分 150 分

注意事项：

1. 答题前，考生务必在答题卡上将自己的姓名、座位号、准考证号用 0.5 毫米的黑色签字笔填写清楚，考生考试条形码由监考老师粘贴在答题卡上的“贴条形码区”。

2. 选择题使用 2B 铅笔填涂在答题卡上对应题目标号的位置上，如需改动，用橡皮擦擦干净后再填涂其它答案；非选择题用 0.5 毫米的黑色签字笔在答题卡的对应区域内作答，超出答题区域答题的答案无效；在草稿纸上、试卷上答题无效。

3. 考试结束后由监考老师将答题卡收回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知命题 $p:\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2-2x-3\leqslant 0$，则 $\neg p$ 为

A．$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2-2x-3\geqslant 0$　　B．$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2-2x-3<0$

C．$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-2x-3\leqslant 0$　　D．$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-2x-3>0$

2．设 $a>0$，$b>0$ 且 $a+b=2$，则 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ 的最小值为

A．2　　B．3　　C．$2\sqrt{2}$　　D．$3\sqrt{2}$

3．在 $(x-\dfrac{1}{x})^8$ 的展开式中，含 x^4 项的系数为

A．-56　　B．56　　C．-28　　D．28

4．随机变量 $X\sim B(4,p)$，若 $P(X\geqslant 1)=\dfrac{65}{81}$，则 $D(X)=$

A．$\dfrac{32}{81}$　　B．$\dfrac{16}{27}$　　C．$\dfrac{8}{9}$　　D．$\dfrac{64}{243}$

5．某市环保部门研究近十年空气质量数据，得到以下结论：

结论一：$PM_{2.5}$ 浓度与机动车保有量的样本相关系数 $r_1=0.92$；

结论二：绿化覆盖率与呼吸道疾病发病率的样本相关系数 $r_2=-0.12$；

结论三：工业能耗与近地面臭氧浓度的样本相关系数 $r_3=0.75$．

下列说法正确的是

A．由结论一可知，机动车保有量增加是 $PM_{2.5}$ 浓度升高的直接原因

B．由结论二可知，绿化覆盖率与呼吸道疾病发病率无关联

C．结论三表明工业能耗与近地面臭氧浓度呈正相关，且线性相关性比结论一更强

D．结论一中 $|r_1|$ 接近 1，说明 $PM_{2.5}$ 浓度与机动车保有量存在极强的线性相关关系

6．已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+2^n(n\in\mathbf{N}^*)$，则$a_{10}=$

A．$2^{10}-1$　　B．$2^{11}+1$　　C．$2^{10}+1$　　D．$2^{11}-1$

7．在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$．若点$P$满足$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}+k\boldsymbol{c}$，且点$P$在平面$A_1BC$内，则$k=$

A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{1}{6}$　　C．$\frac{2}{3}$　　D．1

8．设函数$f(x)=\mathrm{e}^x-ax(a>0)$，若存在唯一整数$x_0$使$f(x_0)<0$，则$a$的取值范围为

A．$(\frac{\mathrm{e}}{2},\mathrm{e}]$　　B．$(\frac{\mathrm{e}}{2},\mathrm{e})$　　C．$(\mathrm{e},\frac{\mathrm{e}^2}{2}]$　　D．$(\mathrm{e},\frac{\mathrm{e}^2}{2})$

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分。

9．将6本不同的书分给甲、乙、丙三人，每人至少分得1本，则下列说法正确的是

A．若甲分得1本，乙分得2本，丙分得3本，则有60种方案

B．若每人分得2本，则有90种方案

C．若三人分得书本数互不相同，则有360种方案

D．共有450种分配方案

10．已知圆$C:x^2+y^2-4x-8y+12=0$和直线$l:x-y+k=0$，则下列说法正确的是

A．当$k=0$时，直线l被圆截得的弦长为$2\sqrt{6}$

B．当$k=0$时，圆上到直线l的距离为1的点有3个

C．存在实数k，使得直线l与圆相切

D．若直线l与圆相交，则实数k的取值范围为$(-2,6)$

11．已知函数$f(x)=x^3+3mx^2+3(m\in\mathbf{R})$，则下列说法正确的是

A．若$x=0$为$f(x)$的极小值点，则m的取值范围为$(0,+\infty)$

B．存在m，使得$f(x)$在$(0,+\infty)$上有且仅有一个零点

C．当$m=0$时，过点$(0,0)$存在两条直线与曲线$y=f(x)$相切

D．存在m，使得$f(\frac{1}{2025})+f(\frac{2}{2025})+f(\frac{3}{2025})+\cdots+f(\frac{4049}{2025})=4049$

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分。

12．设集合$A=\{x\mid x^2-3x\leqslant 0\}$，$B=\{x\mid \log_2(x-1)<1\}$，则$A\cap B=$______．

13．某产品的广告投入 x（万元）与销售额 y（万元）的统计数据如下：

x	2	3	5	6
y	20	35	50	55

若 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=9.5x+\hat{a}$，则 $\hat{a}=$______.

14．数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=(-1)^n a_n+n\ (n\in\mathbf{N}^*)$，则 $\{a_n\}$ 的前 100 项和为______.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15．（13 分）

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d>0$，前 n 项和为 S_n，且 $S_5=15$，a_1，a_3，a_9 成等比数列.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）证明：$\dfrac{1}{S_1}+\dfrac{1}{S_2}+\cdots+\dfrac{1}{S_n}<2(n\in\mathbf{N}^*)$.

16．（15 分）

一批零件共有 12 件，其中有 3 件次品，现不放回地随机抽取 4 件进行检验.

（1）求抽到的次品数 X 的分布列；

（2）若已知抽到的 4 件中至少有 1 件次品，求恰好有 2 件次品的概率.

17．（15 分）

随着手机的日益普及，学生使用手机对学校管理和学生发展带来诸多影响．某中学为探究“周末使用手机时长是否影响学业成绩”，随机调查 100 名学生，得到部分统计数据如下表：

学业成绩	使用手机 $\leqslant 2$ 小时	使用手机 >2 小时
良好	m	20
不良好	n	40

记事件 $A=$“学业成绩良好且使用手机 $\leqslant 2$ 小时”，事件 $B=$“学业成绩不良好且使用手机 $\leqslant 2$ 小时”，已知事件 A 的频率是事件 B 的频率的 3 倍.

（1）求表中的 m，n 的值；

（2）记使用手机 $\leqslant 2$ 小时的学生中学业成绩良好的概率为 P，求 P 的估计值；

（3）根据小概率值 $\alpha=0.001$ 的独立性检验，分析周末使用手机时长与学业成绩是否有关联.

参考数据：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

α	0.10	0.05	0.01	0.005	0.001
x_α	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

18．（17分）

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x}\sin x-ax(a\in\mathbf{R})$．

（1）当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程；

（2）讨论函数 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的单调性；

（3）若 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内恰有两个不同的极值点，求 a 的取值范围.

19．（17分）

已知双曲线 $\Gamma:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$ 的离心率为 $\sqrt{2}$，且过点 $(\sqrt{2},1)$．抛物线 $C:y^2=2px$ 的焦点与双曲线 Γ 的右焦点重合.

（1）求双曲线 Γ 的标准方程；

（2）设直线 $l:x=my+\sqrt{2}$ 与抛物线 C 交于 A，B 两点，与双曲线 Γ 的左、右两支分别交于 C，D 两点.

（i）探究是否存在实数 m，使得 $|AB|=2|CD|$，若存在，求出 m 的值，若不存在，请说明理由；

（ii）求 $S_{\triangle OAB}+4\sqrt{2}S_{\triangle OCD}$ 的最小值.