绵阳南山中学实验学校高 2023 级高三（上）零诊考试

数学参考答案

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
答案	D	B	C	A	A	C	A	B	ABC	BD	ABD

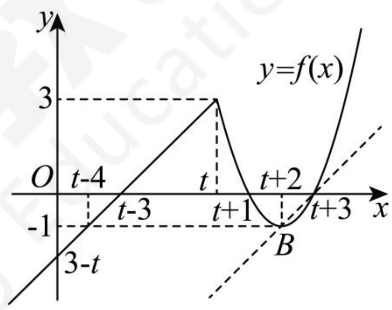
二、填空题

12．$[0,2)$　　　13．4　　　14．$\left(\dfrac{25}{4},+\infty\right)$

14．【详解】由 $y=x-t+3$ 在 $x\in(-\infty,t)$ 上单调递增，且过点 $(t-4,-1)$，

在 $x\in[t,+\infty)$ 上 $y=(x-t-2)^2-1$，在 $[t,t+2)$ 上单调递减，在 $(t+2,+\infty)$ 上单调递增，

结合 $f(x)$ 解析式，其大致图象如图，



随 t 变化，$f(x)$ 的图象只在 x 轴上平移，

令过 $B(t+2,-1)$ 且平行于 $y=x-t+3$ 的直线为 $y=x+m$，

则 $t+2+m=-1$，所以 $m=-3-t$，故 $y=x-t-3$，

联立 $y=x-t-3$ 与 $y=(x-t-2)^2-1$，消去 y 得 $x-t-2=(x-t-2)^2$，

所以 $x=t+2$ 或 $x=t+3$，

对任意 $x\in\mathbf{R}$，$t\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x+a)>f(x)$ 成立，由图知，在 $(t-4,t+2)$ 上 $f(x)$ 不单调，必有 $a>6$，

需保证 $x\in(t-4,t-3)$，$x+a\in(t+2,t+3)$ 时有 $(x+a-t-2)^2-1>x-t+3$，

所以 $x^2+(2a-2t-5)x+a^2-2ta+t^2-4a+5t>0$，

$\Delta=(2a-2t-5)^2-4(a^2-2ta+t^2-4a+5t)<0$，整理得 $4a>25$，所以 $a>\dfrac{25}{4}$，

综上，实数 a 的取值范围是 $\left(\dfrac{25}{4},+\infty\right)$.

三、解答题

15．（1）由不等式 $mx^2-2x-3\le 0$ 的解集为 $[-1,n]$ 知：关于 x 的方程 $mx^2-2x-3=0$ 的两根为 -1 和 n，

且 $m>0$

由根与系数关系，得 $\begin{cases}-1+n=\dfrac{2}{m}\\ -1\times n=-\dfrac{3}{m}\end{cases}$，$\therefore\begin{cases}m=1\\ n=3\end{cases}$，

所以原不等式化为$(x-2)(ax-2)>0$，

当$0<a<1$时，原不等式化为$(x-2)\left(x-\frac{2}{a}\right)>0$，且$2<\frac{2}{a}$，解得$x>\frac{2}{a}$或$x<2$；

∴当$0<a<1$时，原不等式的解集为$\left\{x\middle|x>\frac{2}{a}或x<2\right\}$；

（2）假设存在满足条件的实数a，

由（1）得：$m=1$，∴$f(x)=x^2-2x-3$，

∴$y=f(a^x)-3a^{x+1}=a^{2x}-2a^x-3-3a^{x+1}=(a^x)^2-(3a+2)a^x-3$，

令$a^x=t$，$(a^2\le t\le a)$，则$y=t^2-(3a+2)t-3$∴对称轴为：$t=\frac{3a+2}{2}$，

又$0<a<1$，∴$a^2<a<1$，$1<\frac{3a+2}{2}<\frac{5}{2}$，∴函数$y=t^2-(3a+2)t-3$在$[a^2,a]$递减，

∴$t=a$时，y最小为：$y=-2a^2-2a-3=-5$，解得：$a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

16．（1）当$n=1$时，$8S_1=(a_1+2)^2=8a_1$，解得$a_1=2$．

当$n\ge2$时，由$8S_n=(a_n+2)^2$，得$8S_{n-1}=(a_{n-1}+2)^2$，

则$8a_n=a_n^2+4a_n-a_{n-1}^2-4a_{n-1}$，则$(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-4)=0$．

因为$a_n>0$，所以$a_n-a_{n-1}=4$，所以$\{a_n\}$是以2为首项，4为公差的等差数列，

则$a_n=a_1+(n-1)d=4n-2$．

（2）由（1）可知$b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{(4n-2)(4n+2)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n-2}\ \frac{1}{4n+2}\right)$，

则$T_n=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{10}\right)+\cdots+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n+2}\right)$

$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4n+2}\right)=\frac{n}{8n+4}$．

17．（1）当$a=1$时，则$f(x)=\mathrm{e}^x-x-1$，$f'(x)=\mathrm{e}^x-1$，可得$f(1)=\mathrm{e}-2$，$f'(1)=\mathrm{e}-1$，

即切点坐标为$(1,\mathrm{e}-2)$，切线斜率$k=\mathrm{e}-1$，

所以切线方程为$y-(\mathrm{e}-2)=(\mathrm{e}-1)(x-1)$，即$(\mathrm{e}-1)x-y-1=0$．

（2）因为$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，且$f'(x)=\mathrm{e}^x-a$，

若$a\le0$，则$f'(x)\ge0$对任意$x\in\mathbf{R}$恒成立，

可知$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增，无极值，不合题意；

若 $a>0$，令 $f'(x)>0$，解得 $x>\ln a$；令 $f'(x)<0$，解得 $x<\ln a$；

可知 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 内单调递减，在 $(\ln a,+\infty)$ 内单调递增，

则 $f(x)$ 有极小值 $f(\ln a)=a-a\ln a-a^3$，无极大值，

由题意可得：$f(\ln a)=a-a\ln a-a^3<0$，即 $a^2+\ln a-1>0$，

构建 $g(a)=a^2+\ln a-1,a>0$，则 $g'(a)=2a+\dfrac{1}{a}>0$，

可知 $g(a)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递增，且 $g(1)=0$，

不等式 $a^2+\ln a-1>0$ 等价于 $g(a)>g(1)$，解得 $a>1$，

所以 a 的取值范围为 $(1,+\infty)$；

18.（1）由题设 $f(x)=\ln(x+1)+x^2-x$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}+2x-1=\dfrac{x(2x+1)}{x+1}$ 且 $x>-1$，

当 $-1<x<-\dfrac{1}{2}$，$f'(x)>0$，即 $f(x)$ 在 $(-1,-\dfrac{1}{2})$ 上单调递增，

当 $-\dfrac{1}{2}<x<0$，$f'(x)<0$，即 $f(x)$ 在 $(-\dfrac{1}{2},0)$ 上单调递减，

当 $x>0$，$f'(x)>0$，即 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

（2）由题设 $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}+2ax-1$，令 $g(x)=f'(x)$，则 $g'(x)=-\dfrac{1}{(x+1)^2}+2a$，

对 $x\ge 0$ 时，$f(x)\ge 0$ 恒成立，且 $f(0)=f'(0)=0$，只需 $g'(0)=-1+2a\ge 0$，即 $a\ge\dfrac{1}{2}$，

另一方面，$a\ge\dfrac{1}{2}$ 时，$g'(x)=-\dfrac{1}{(x+1)^2}+2a\ge 1-\dfrac{1}{(x+1)^2}\ge 0$，

所以 $g(x)=f'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，则 $f'(x)\ge f'(0)=0$，

所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，则 $f(x)\ge f(0)=0$，满足题设，

综上，$a\ge\dfrac{1}{2}$；

（3）由（2）取 $a=\dfrac{1}{2}$，在 $(0,+\infty)$ 上 $f(x)=\ln(x+1)+\dfrac{x^2}{2}-x>0$，

令 $x=\dfrac{1}{k}$，$k\in\mathrm{N}^*$，则 $\ln\left(\dfrac{1}{k}+1\right)>\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{2k^2}$，即 $2[\ln(k+1)-\ln k]>\dfrac{2k-1}{k^2}$，

所以 $\sum\limits_{k=1}^{n}2[\ln(k+1)-\ln k]>\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2k-1}{k^2}$，则 $1+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{3^2}+\cdots+\dfrac{2n-1}{n^2}<2\ln(n+1)$，得证.

19．（1）证明：因为方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0\left(a\neq 0\right)$ 有三个根 x_1,x_2,x_3，

所以方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0\left(a\neq 0\right)$ 即为 $a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right)=0$，

变形为 $ax^3-a\left(x_1+x_2+x_3\right)x^2+a\left(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1\right)x-ax_1x_2x_3=0$，

比较两个方程可得 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{a}\\x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\dfrac{c}{a}\\x_1x_2x_3=-\dfrac{d}{a}\end{cases}$.

（2）（i）证明：$\because f\left(x\right)$ 有两个零点，

$\therefore f\left(x\right)=0$ 有一个二重根 x_1，一个一重根 x_2，且 $\begin{cases}x_1\neq 0,\\x_2\neq 0,\end{cases}$

由（1）可得 $\begin{cases}2x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}\\x_1^2+2x_1x_2=\dfrac{1}{a}\\x_1^2x_2=-\dfrac{1}{a}\end{cases}$，由 $x_1^2+2x_1x_2=\dfrac{1}{a}<0$ 可得 $x_1x_2<0$.

由 $x_1^2\cdot x_2=-\dfrac{1}{a}>0$ 可得 $x_2>0$，$\therefore x_1<0<x_2$.

联立上两式可得 $x_1^2+2x_1x_2=-x_1^2\cdot x_2$，解得 $x_2=-\dfrac{x_1}{x_1+2}$，

又 $x_2>0,x_1<0\therefore x_1>-2$，综上 $-2<x_1<0<x_2$.

（ii）解：由（i）可得 $\begin{cases}a=-\dfrac{1}{x_1^2x_2}=\dfrac{x_1+2}{x_1^3}=\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{2}{x_1^3}\\b=\dfrac{2x_1+x_2}{x_1^2x_2}=\dfrac{2}{x_1x_2}+\dfrac{1}{x_1^2}=\dfrac{-2x_1-4}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_1^2}=-\dfrac{2}{x_1}-\dfrac{3}{x_1^2}\end{cases}$，

$\therefore a+b=\dfrac{2}{x_1^3}-\dfrac{2}{x_1^2}-\dfrac{2}{x_1}$.

令 $t=\dfrac{1}{x_1},\because x_1\in\left(-2,0\right),\therefore t\in\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)$，则 $g\left(t\right)=2\left(t^3-t^2-t\right)$，

$\because g'\left(t\right)=2\left(3t^2-2t-1\right)=2\left(3t+1\right)\left(t-1\right)$，当 $t<-\dfrac{1}{2}$ 时，$g'\left(t\right)>0$，

$\therefore g\left(t\right)$ 在 $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)$ 上单调递增，$\therefore g\left(t\right)<g\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$，

$\therefore a+b\in\left(-\infty,\dfrac{1}{4}\right)$.