绵阳南山中学实验学校高 2023 级高三（上）零诊考试试题

数　学

命题：何彬兰　张胜男　　　　考试时间：120 分钟　　满分：150 分

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将答题卡交回。

一、单选题：（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1．已知集合 $A=\{1,2,3,5,6,7\}$，$B=\{x|\ x-2\in A\}$，则 $A\cap B=$

A．$\{1,2,3\}$　　B．$\{1,3,5\}$　　C．$\{5,6,7\}$　　D．$\{3,5,7\}$

2．“$a>b$”是“$\lg a>\lg b$”的

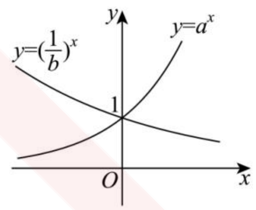
A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

3．已知函数 $y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq1$）与函数 $y=\left(\frac{1}{b}\right)^x$（$b>0$ 且 $b\neq1$）的图象如图所示，则

A．$b>1>a>0$　　B．$a>1>b>0$

C．$a>b>1$　　D．$b>a>1$



4．若函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+1$ 在 $x=-4$ 处取得极大值，则实数 $a=$

A．-2　　B．-1　　C．1　　D．2

5．设 $a=3^{-0.3}$，$b=\log_4 5$，$c=\lg 0.1$，则

A．$c<a<b$　　B．$b<c<a$　　C．$a<b<c$　　D．$c<b<a$

6．已知等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 1，且 a_2,a_3,a_6 成等比数列，则 $a_4=$

A．-3　　B．-5　　C．-5 或 1　　D．-3 或 1

7．青少年视力是社会普遍关注的问题，视力情况可借助视力表测量.通常用五分记录法和小数记录法记录视力数据，五分记录法的数据 L 和小数记录法的数据 V，满足 $L=5+\lg V$．已知某同学视力的五分记录法的数据为4.9，则其视力的小数记录法的数据为（参考数据：$\sqrt[10]{10}\approx1.259$）

A．0.8　　B．1　　C．1.3　　D．1.5

8．已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{|x-1|}+x^2-2x$，若正数 a 满足 $f\left(\log_a\frac{3}{4}\right)<\mathrm{e}$，则 a 的取值范围为

A．$a>\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$0<a<\frac{\sqrt{3}}{2}$

C．$0<a<\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $a>1$　　D．$a>1$

二、多选题：（本大题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分）

9．下列选项正确的是

A．若 $a>b>0$，则 $\sqrt[3]{a}>\sqrt[3]{b}$　　B．若 $a>b$，则 $ac^2\geq bc^2$

C．若 $a>b>0$，$d>c>0$，则 $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$　　D．若 $a>b$，$c>d$，则 $a-c>b-d$

10．若等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，公比为 q，$S_3=14$，$S_6=126$，则下列结论正确的是

A．$q=\frac{1}{2}$　　B．$a_1=2$　　C．$S_9=1024$　　D．$S_n=2(a_n-1)$

11.定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(1+x)=f(1-x)$，且 $f(x+2)$ 为奇函数，已知当 $0\leq x\leq1$ 时，$f(x)=\mathrm{e}^x-1$，则下列结论正确的是

A．$f(x+4)=f(x)$　　B．$f(x)$ 在区间 $[9,11]$ 上单调递减

C．$f\left(\frac{1}{3}\right)<f\left(\frac{7}{4}\right)$　　D．$\sum_{i=1}^{2025}f(i)=\mathrm{e}-1$

三、填空题：（本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分）

12．函数 $f(x)=\sqrt{x}\ln(2-x)$ 的定义域为_________.

13．设 a，$b>0$，$a+\dfrac{1}{b}=1$，则 $b+\dfrac{1}{a}$ 的最小值为_________.

14．已知函数 $f(x)=\begin{cases}x-t+3, & x<t\\ (x-t-2)^2-1, & x\geq t\end{cases}$，若对任意 $x\in\mathbf{R}$，$t\in\mathbf{R}$，不等式 $f(x+a)>f(x)$ 成立，则实数 a 的取值范围是_________.

四、解答题：(本大题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

15．已知二次函数 $f(x)=mx^2-2x-3$，关于实数 x 的不等式 $f(x)\leq 0$ 的解集为 $[-1,n]$．

（1）当 $0<a<1$ 时，解关于 x 的不等式：$ax^2+n+1>(m+1)x+2ax$；

（2）是否存在实数 $a\in(0,1)$，使得关于 x 的函数 $y=f(a^x)-3a^{x+1}$ $(x\in[1,2])$ 的最小值为 -5？若存在，求实数 a 的值；若不存在，说明理由．

16．已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $8S_n=(a_n+2)^2$．

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若 $b_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n．

17．已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax-a^3$．

（1）当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（2）若 $f(x)$ 有极小值，且极小值小于 0，求 a 的取值范围．

18．已知函数 $f(x)=\ln(x+1)+ax^2-x\ (a\in\mathbf{R})$．

（1）当 $a=1$ 时，讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）当 $x\geq 0$ 时，$f(x)\geq 0$ 恒成立，求 a 的取值范围；

（3）求证：当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，$1+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{3^2}+\cdots+\dfrac{2n-1}{n^2}<2\ln(n+1)$．

19．设实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$①，有两根 x_1,x_2，

则方程可变形为 $a(x-x_1)(x-x_2)=0$，展开得 $ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1x_2=0$②，

比较①②可以得到 $\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{b}{a},\\ x_1x_2=\dfrac{c}{a},\end{cases}$

这表明，任何一个一元二次方程的根与系数的关系为：两个根的和等于一次项系数与二次项系数的比的相反数，两个根的积等于常数项与二次项系数的比．这就是我们熟知的一元二次方程的韦达定理．

事实上，与二次方程类似，一元三次方程也有韦达定理．

设方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0\ (a\neq 0)$ 有三个根 x_1,x_2,x_3，则有 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{a}\\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\dfrac{c}{a}\\ x_1x_2x_3=-\dfrac{d}{a}\end{cases}$③

（1）证明公式③，即一元三次方程的韦达定理；

（2）已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2+x+1\ (a<0)$ 恰有两个零点．

（i）求证：$f(x)$ 的其中一个零点大于 0，另一个零点大于 -2 且小于 0；

（ii）求 $a+b$ 的取值范围．