

【2025年9月】

绵阳南山中学高2023级高三第一次教学质量检测

数学试题

本试卷分为试题卷和答题卡两部分,其中试题卷由选择题和非选择题组成,共4页,答题卡共6页.满分150分,考试时间120分钟.

注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的班级、姓名用0.5毫米签字笔填写清楚,同时用2B铅笔将准考证号准确填涂在“考号”栏目内.
2. 选择题使用2B铅笔填涂在答题卡对应题目标号的位置上,如需改动,用橡皮擦擦干净后再选涂其它答案;非选择题用0.5毫米黑色签字笔书写在答题卡的对应框内,超出答题区域书写的答案无效;在草稿纸、试题卷上答题无效.
3. 考试结束后,将答题卡交回.

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一个是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{x | -2 < x < 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} | |x-1| \leq 1\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$
 A. $\{1, 2\}$ B. $\{0, 1, 2\}$ C. $\{-1, 0, 1, 2\}$ D. $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$
2. 已知 a, b 是实数, 则“ $a^2b > ab^2$ ”是“ $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ ”的 $(\quad)$
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
3. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = \frac{1+a_n}{1-a_n}$, 则 $a_{2025} = (\quad)$
 A. $\frac{1}{2}$ B. -2 C. $-\frac{1}{3}$ D. 3
4. 已知向量 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (4, 3)$, $\vec{c} = (k, 2)$. 若 $3\vec{a} - \vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 共线, 则实数 k 的值为 $(\quad)$
 A. $\frac{2}{3}$ B. $-\frac{3}{2}$ C. $-\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{2}$
5. 设 $x > 0$, $y > 0$, 且 $\frac{1}{x} + y = 1$, 则 $x + \frac{2}{y}$ 的最小值为 $(\quad)$
 A. 3 B. $3 + 2\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $3\sqrt{2} + 2$
6. 已知 $\frac{\cos 2\theta}{\cos(\theta - \frac{\pi}{4})} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 则 $\sin 2\theta = (\quad)$
 A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{2}{3}$

7. 按照《中小学校教室换气卫生要求》，教室内二氧化碳最高容许浓度不高于 0.10%。经测定，刚下课时，教室内含有 0.18% 的二氧化碳，若开窗通风后教室内的二氧化碳浓度为 $y\%$ ，且 y 随时间 t (单位: min) 的变化规律可以用函数 $y = 0.03 + \lambda e^{-\frac{t}{10}}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) 描述，则该教室内的二氧化碳浓度达到国家标准需要的时间 t 的最小整数值为 ()

(参考数据: $\ln 3 \approx 1.099$, $\ln 5 \approx 1.609$, $\ln 7 \approx 1.946$.)

- A. 1 B. 3 C. 7 D. 8

8. 已知函数 $f(x) = xe^x + e^x$, $g(x) = x \ln x + x$, 若 $f(x_1) = g(x_2) > 0$, 则 $\frac{x_2}{x_1}$ 可取 ()

- A. -1 B. $-\frac{1}{e}$ C. 1 D. $\sqrt{e}$

二、多选题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分。在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对得 6 分, 选对但不全的得部分分, 有错选得 0 分。

9. 下列函数中, 在定义域内既是奇函数又是减函数的是 ()

- A. $y = -x + 1$ B. $y = -x^3$ C. $y = \frac{1}{x}$ D. $y = -x|x|$

10. 已知首项为正数的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $(S_{15} - S_{11})(S_{15} - S_{12}) < 0$, 则 ()

- A. $a_{13} + a_{14} > 0$ B. $S_{11} < S_{15} < S_{12}$
C. 当 $n = 14$ 时, S_n 取最大值 D. 当 $S_n < 0$ 时, n 的最小值为 27

11. 若 $f'(x)$ 为函数 $f(x)$ 的导函数, 对任意的 $x, y \in \mathbb{R}$, 恒有 $2f(x)f(y) - f(x+y) = f(x-y)$, 且 $f(0) \neq 0$, 则 ()

- A. $f(0) = 1$ B. $f(x) < -1$
C. $f'(x)$ 为奇函数 D. 若 $f(1) = \frac{1}{2}$, 则 $\sum_{n=1}^{2025} f(n) = -1$

三、填空题: 本题共 3 个小题, 每小题 5 分, 共 15 分。把答案直接填在答题卷中的横线上。

12. 半径为 2 的扇形中, 圆心角为 120° , 该扇形的面积为 _____.

13. 已知向量 $\vec{a} = (-2, 1)$, $\vec{b} = (1, t)$, 若向量 $\vec{b}$ 在向量 $\vec{a}$ 上的投影向量为 $-\frac{1}{5}\vec{a}$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ _____.

14. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x + 1, & x \leq 0 \\ |\ln x|, & x > 0 \end{cases}$, 若函数 $y = f(ax)$ 所有零点的乘积为 1, 则实数 a 的取值范围是 _____.

四、解答题: 本题共5小题, 第15题13分, 第16、17小题15分, 第18、19小题17分, 共77分.

解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分13分)

已知函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$, 其中 $A > 0$, $\omega > 0$, $0 < \varphi < \pi$, 函数 $f(x)$ 图象上相邻的两个对称中心之间的距离为 $\frac{\pi}{4}$, 且在 $x = \frac{\pi}{3}$ 处取到最小值 -2 .

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 若将函数 $f(x)$ 图象上所有点的横坐标伸长到原来的2倍(纵坐标不变), 再将其向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位, 得到函数 $g(x)$ 图象, 求函数 $g(x)$ 的单调递增区间和对称中心.

16. (本小题满分15分)

在 $\triangle ABC$ 中, $\tan A - \tan B = \frac{\sin C - \sin B}{\cos A \cos B}$.

(1) 求 A ;

(2) 若 $BC = 2$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

17. (本小题满分15分)

阅读一元二次方程韦达定理的推导过程, 完成下列问题:

设一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$) 的两实根为 x_1, x_2 ,

则 $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, 展开得: $ax^2 + bx + c = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$,

比较系数得: $b = -a(x_1 + x_2)$, $c = ax_1x_2$, 于是 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.

(1) 已知一元三次方程 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ($a \neq 0$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$) 的三个实根为 x_1, x_2, x_3 , 类比于上述推导过程, 求 $x_1x_2x_3$;

(2) 已知 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$, 若存在三个不相等的实数 m, n, t , 使得 $f(m) = f(n) = f(t)$, 求 mnt 的取值范围.

18. (本小题满分 17 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_2=3$, 且对任意正整数 $n \geq 3$ 有 $a_n=3a_{n-1}-2a_{n-2}$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=1, b_n=a_n-a_{n-1}(n \geq 2)$.

(1) 证明: 数列 $\{b_n\}$ 是等比数列;

(2) 设 $c_n = \frac{2n-1}{b_n}$, 数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n ;

①求 S_n ;

②若不等式 $(-1)^n \lambda < S_n + \frac{n}{2^{n-2}}$ 对任意的正整数 n 恒成立, 求实数 λ 的取值范围.

19. (本小题满分 17 分)

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, 都存在唯一的实数 c_n , 使得 $f(c_n) = n$, 则称函数 $f(x)$ 存在“源数列” $\{c_n\}$. 已知 $f(x) = \sqrt{x} - \ln x, x \in (0, 1]$.

(1) 证明: $f(x)$ 存在源数列;

(2) ①若 $f(x) - \frac{\lambda}{\sqrt{x}} \leq 0$ 恒成立, 求 λ 的取值范围;

②记 $f(x)$ 的源数列为 $\{c_n\}$, 前 n 和为 S_n 证明: $S_n < \frac{7}{4}$.

绵阳南山中学 高 2023 级高三第一次教学质量检测

数学参考答案

一. 选择题

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
B	C	A	C	B	B	D	A	BD	ABD	ACD

8. A. 依题意, 由 $g(x_2) = x_2(\ln x_2 + 1) > 0$ 得 $x_2 > \frac{1}{e}$,

令 $g'(x) = 2 + \ln x > 0$, 函数 $g(x)$ 在 $(\frac{1}{e^2}, +\infty)$ 上单调递增,

由 $f(x_1) = e^{x_1}(x_1 + 1) > 0$ 得 $x_1 > -1$, 则 $f(x) = e^x(\ln e^x + 1) = g(e^x)$,

由 $f(x_1) = g(x_2) > 0$ 得: $g(e^{x_1}) = g(x_2)$, 又 $e^{x_1} > \frac{1}{e}$, $x_2 > \frac{1}{e}$,

于是得 $x_2 = e^{x_1}(x_1 > -1)$, $\frac{x_2}{x_1} = \frac{e^{x_1}}{x_1}$, 令 $h(x) = \frac{e^x}{x} (x > -1)$, 求得 $h'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$,

当 $-1 < x < 0$, 或 $0 < x < 1$ 时, $h'(x) < 0$, 当 $x > 1$ 时, $h'(x) > 0$,

即函数 $h(x)$ 在 $(-1, 0)$, $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

当 $x > 0$ 时, $h(x)_{\min} = h(1) = e$, 且 $x \rightarrow +\infty$, $h(x) \rightarrow +\infty$,

$h(-1) = -\frac{1}{e}$, 且 $x \rightarrow 0^-$, $h(x) \rightarrow -\infty$, 故 $h(x) \in (-\infty, -\frac{1}{e}) \cup [e, +\infty)$,

即 $\frac{x_2}{x_1} \in (-\infty, -\frac{1}{e}) \cup [e, +\infty)$, 显然选项 A 符合要求, 选项 B, C, D 都不符合要求.

11. ACD. 原式移项得 $2f(x) \cdot f(y) = f(x+y) + f(x-y)$,

即 $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \cdot f(y)$.

对于 A, 令 $x=y=0$, 则由 $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \cdot f(y)$ 可得 $2f(0) = 2f^2(0)$,
故 $f(0) = 0$ (舍去) 或 $f(0) = 1$, 故 A 正确;

对于 B, 令 $x=y$, 则 $f(2x) + f(0) = 2f^2(x)$, 故 $f(2x) + f(0) \geq 0$.

由于 $x \in \mathbb{R}$, 令 $t = \frac{x}{2}$, 则 $t \in \mathbb{R}$, 所以 $f(t) + f(0) \geq 0 \Rightarrow f(t) \geq -f(0) = -1$, 故 B 错误;

对于 C, 令 $x=0$, 则 $f(y) + f(-y) = 2f(0) \cdot f(y)$, 即 $f(-y) = f(y)$, 因为 $x, y \in \mathbb{R}$,
所以 $f(-x) = f(x)$, 所以 $f(x)$ 为偶函数, 对 $f(-x) = f(x)$ 左右两边同时求导得
 $f'(-x) = -f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$, 所以 $f'(x)$ 为奇函数, 故 C 正确;

对于 D, 由 A 选项 $f(0) = 1$, 若 $f(1) = \frac{1}{2}$, 令 $x=y=1$, 则 $f(2) + f(0) = 2f^2(1)$,

即 $f(2) + 1 = \frac{1}{2}$, $\therefore f(2) = -\frac{1}{2}$,

令 $x=2, y=1$, 则 $f(3) + f(1) = 2f(2) \cdot f(1)$, 即 $f(3) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$, $\therefore f(3) = -1$,

令 $x=3, y=1$, 则 $f(4) + f(2) = 2f(3) \cdot f(1)$, 即 $f(4) - \frac{1}{2} = -1$, $\therefore f(4) = -\frac{1}{2}$,

令 $x=4, y=1$, 则 $f(5) + f(3) = 2f(4) \cdot f(1)$, 即 $f(5) - 1 = -\frac{1}{2}$, $\therefore f(5) = \frac{1}{2}$,

令 $x=5, y=1$, 则 $f(6) + f(4) = 2f(5) \cdot f(1)$, 即 $f(6) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $\therefore f(6) = 1$,

令 $x=6, y=1$, 则 $f(7)+f(5)=2f(6) \cdot f(1)$, 即 $f(7)+\frac{1}{2}=1, \therefore f(7)=\frac{1}{2}$,

令 $x=7, y=1$, 则 $f(8)+f(6)=2f(7) \cdot f(1)$, 即 $f(8)+1=\frac{1}{2}, \therefore f(8)=-\frac{1}{2}$,

由此可得 $f(n) (n \in \mathbb{N}^*)$ 的值有周期性, 且周期为 6,

且 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)=0$,

故 $\sum_{n=1}^{2025} f(n) = 337 \times [f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)] + f(1)+f(2)+f(3) = -1$, 故 D 正确.

二. 填空题

12. $\frac{4}{3}\pi$ 13. -1 14. $(0, \frac{1}{2}) \cup [1, +\infty)$

三. 解答题

15. (1) 函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$, 其中 $A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \pi$,

由题知函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{\omega}$, 解得 $\omega = 4$,

又函数 $f(x)$ 在 $x = \frac{\pi}{3}$ 处取到最小值 -2 , 则 $A = 2$, 且 $f(\frac{\pi}{3}) = -2$,

即 $\frac{4\pi}{3} + \varphi = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, 令 $k=0$ 可得 $\varphi = \frac{\pi}{6}$, $\therefore f(x) = 2\sin(4x + \frac{\pi}{6})$.

(2) 函数 $f(x) = 2\sin(4x + \frac{\pi}{6})$ 图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍 (纵坐标不变),

得 $y = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6})$, 再向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位可得 $g(x) = 2\sin[2(x + \frac{\pi}{6}) + \frac{\pi}{6}] = 2\cos 2x$.

令 $-\pi + 2k\pi \leq 2x \leq 0 + 2k\pi$, 解得 $-\frac{\pi}{2} + k\pi \leq x \leq k\pi$,

$\therefore g(x)$ 的单调递增区间为 $[-\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi] (k \in \mathbb{Z})$.

令 $2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, 解得 $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $\therefore g(x)$ 的对称中心为 $(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, 0) (k \in \mathbb{Z})$.

16. (1) 由 $\tan A - \tan B = \frac{\sin C - \sin B}{\cos A \cos B}$, 可得 $\frac{\sin A}{\cos A} - \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\sin C - \sin B}{\cos A \cos B}$,

整理得 $\sin A \cos B - \cos A \sin B = \sin C - \sin B$.

则 $\sin A \cos B - \cos A \sin B = \sin(A+B) - \sin B$,

即 $\sin A \cos B - \cos A \sin B = \sin A \cos B + \cos A \sin B - \sin B$,

所以 $\sin B = 2\cos A \sin B$. 由 $\sin B \neq 0$, 故 $\cos A = \frac{1}{2}$, 又 $A \in (0, \pi)$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$.

(2) 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ,

因为 $A = \frac{\pi}{3}$, 所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{\sqrt{3}}{4}bc = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $bc = 2$.

因为 $BC = a = 2$, 由余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$,

得 $b^2 + c^2 - bc = (b+c)^2 - 3bc = 4$, 则 $b+c = \sqrt{10}$.

所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $a+b+c = 2 + \sqrt{10}$.

17. (1) 由题意知 $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$,

展开得 $ax^3 + bx^2 + cx + d = ax^3 - a(x_1+x_2+x_3)x^2 + a(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)x - ax_1x_2x_3$,

比较系数得 $d = -ax_1x_2x_3$, 即 $x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$.

(2) 令 $f(m) = f(n) = f(t) = s$, m, n, t 是 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1 = s$ 的三个实根,

即为 $x^3 - 6x^2 + 9x + 1 - s = 0$ 的三个不等实根, 由上知 $mnt = s - 1$.

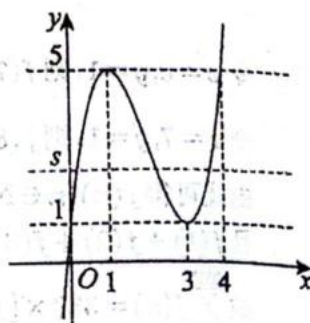
$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-3)(x-1),$$

于是 $x \in (1, 3), f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减,

$x \in (-\infty, 1), f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增, $x \in (3, +\infty), f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增,

且 $f(0) = f(3) = 1, f(1) = f(4) = 5$ 函数 $f(x)$ 的大致图象如图:

为使得 $y = f(x)$ 与 $y = s$ 有三个交点, 则 $s \in (1, 5)$, 故 $mnt = s - 1 \in (0, 4)$.



18. (1) 因为 $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} (n \geq 3)$, $b_n = a_n - a_{n-1} (n \geq 2)$,

$$\text{所以 } \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1} - a_{n-2}} = \frac{3a_{n-1} - 2a_{n-2} - a_{n-1}}{a_{n-1} - a_{n-2}} = 2 (n \geq 3).$$

因为 $a_1 = 1, a_2 = 3$, 所以 $b_2 = a_2 - a_1 = 2$.

又 $b_1 = 1$, 所以 $\frac{b_2}{b_1} = 2$, 即证得 $\{b_n\}$ 是首项为 1, 公比为 2 的等比数列.

(2) ① 由 (1) 可得 $b_n = 2^{n-1}$, 则 $c_n = \frac{2n-1}{b_n} = \frac{2n-1}{2^{n-1}}$,

$$S_n = \frac{1}{2^0} + \frac{3}{2^1} + \frac{5}{2^2} + \frac{7}{2^3} + \dots + \frac{2n-3}{2^{n-2}} + \frac{2n-1}{2^{n-1}},$$

$$\frac{1}{2} S_n = \frac{1}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-3}{2^{n-1}} + \frac{2n-1}{2^n},$$

$$\text{两式相减得: } \frac{1}{2} S_n = \frac{1}{2^0} + \frac{2}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \dots + \frac{2}{2^{n-2}} + \frac{2}{2^{n-1}} - \frac{2n-1}{2^n},$$

$$\text{即 } \frac{1}{2} S_n = 1 + 1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-3}} + \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{2n-1}{2^n},$$

$$\text{所以 } \frac{1}{2} S_n = 1 + \frac{1 \times (1 - \frac{1}{2^{n-1}})}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{2n-1}{2^n}, \text{ 则 } S_n = 6 - \frac{2n+3}{2^{n-1}}.$$

② 因为不等式 $(-1)^n \lambda < S_n + \frac{n}{2^{n-2}}$ 对任意的正整数 n 恒成立, 即 $(-1)^n \lambda < 6 - \frac{3}{2^{n-1}}$ 对任意的正整数 n 恒成立,

当 n 为偶数时, 因为 $f(n) = 6 - \frac{3}{2^{n-1}}$ 在 $[1, +\infty)$ 为增函数, 所以 $\lambda < f(2) = \frac{9}{2}$;

当 n 为奇数时, $-\lambda < 6 - \frac{3}{2^{n-1}}$ 对任意的正整数 n 恒成立, 所以 $-\lambda < f(1) = 3$, 解得 $\lambda > -3$.

综上, 实数 λ 的取值范围为 $(-3, \frac{9}{2})$.

19. (1) 由 $f(x) = \sqrt{x} - \ln x, x \in (0, 1]$, 得 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x}-2}{2x} < 0$,

即 $f(x)$ 在 $(0, 1]$ 上单调递减, 又 $f(1) = 1$, 当 $x > 0$ 且 x 无限趋近于 0 时, $f(x)$ 趋向于正无穷大, 即 $f(x)$ 的值域为 $[1, +\infty)$, 对于 $f(x)$ 可以取到任意正整数, 且在 $x \in (0, 1]$ 上都有存在唯一自变量与之对应, 故对于 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, 令 $f(x) = n$, 其在 $(0, 1]$ 上的解必存在且唯一, 不妨设解为 c_n , 即 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, 则都存在唯一的实数 $c_n \in (0, 1]$, 使得 $f(c_n) = n$, 即 $f(x)$ 存在源数列.

(2) ① $f(x) - \frac{\lambda}{\sqrt{x}} \leq 0$ 恒成立, 即 $\lambda \geq x - \sqrt{x} \ln x$ 恒成立.

令 $t = \sqrt{x} \in (0, 1]$, 即 $\lambda \geq t^2 - 2t \ln t$ 恒成立.

令 $\varphi(t) = t^2 - 2t \ln t$, 则 $\varphi'(t) = 2t - 2 \ln t - 2$,

令 $g(t) = \varphi'(t) = 2t - 2 \ln t - 2, t \in (0, 1]$, 则 $g'(t) = 2 - \frac{2}{t} \leq 0$, 仅在 $t=1$ 时取等号,

即 $g(t)$ 在 $(0, 1]$ 上单调递减, 故 $g(t) \geq g(1) = 0$, 即 $\varphi(t)$ 在 $(0, 1]$ 上单调递增,

故 $\varphi(t)_{\max} = \varphi(1) = 1$, 故 $\lambda \geq 1$;

② 由①得 $f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$, 故 $f(c_n) \leq \frac{1}{\sqrt{c_n}}$, 即 $n \leq \frac{1}{\sqrt{c_n}}$, 则 $c_n \leq \frac{1}{n^2}$.

当 $n \geq 2$ 时, $c_n \leq \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{(n-1)(n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right)$.

当 $n=1$ 时, $S_1 = c_1 \leq \frac{1}{1^2} = 1 < \frac{7}{4}$;

当 $n \geq 2$ 时, $S_n = c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_{n-1} + c_n$

$< 1 + \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) \right]$

$= 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{7}{4} - \frac{2n+1}{2n(n+1)} < \frac{7}{4}$.

综上: $S_n < \frac{7}{4}$.