成都树德中学高 2023 级高三上期开学考试

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的.

1. 若命题“$\forall x\in\mathrm{R}$，$x^2-2ax+6a>0$”是假命题，则 a 的取值范围是（　　）

A. $(0,6)$　　B. $(-\infty,0)\cup(6,+\infty)$

C. $[0,6]$　　D. $(-\infty,0]\cup[6,+\infty)$

【答案】D

【解析】

【分析】由题意可知命题的否定为真命题，由判别式得到不等式，解得 a 的取值范围》

【详解】命题“$\forall x\in\mathrm{R}$，$x^2-2ax+6a>0$”是假命题，

则 $\exists x\in\mathrm{R}$，$x^2-2ax+6a\le 0$ 是真命题，

$\therefore \Delta=4a^2-24a\ge 0$，

解得：$a\ge 6$ 或 $a\le 0$，

即 a 的范围是 $(-\infty,0]\cup[6,+\infty)$．

故选：D.

2. 设集合 $A=\left\{x|2^{2x+1}\le\frac{1}{32}\right\}$，$B=\left\{x|\ y=\sqrt{1-x}+1\right\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\{x|-3\le x\le 1\}$　　B. $\{x|x\le 1\}$　　C. $\{x|x\le -3\}$　　D. $\{x|-1\le x\le 3\}$

【答案】C

【解析】

【分析】解指数不等式得集合 A，求函数定义域得集合 B，然后根据交集的定义求解.

【详解】因为集合 $A=\left\{x|2^{2x+1}\le\frac{1}{32}=2^{-5}\right\}=\{x|x\le -3\}$，$B=\left\{x|y=\sqrt{1-x}+1\right\}=\{x|x\le 1\}$，

所以 $A\cap B=\{x|x\le -3\}$.

故选：C.

3. 从装有 2 个红球和 2 个黑球的口袋内任取 2 个球，那么互斥而不对立的两个事件是（　　）

A. 至少有一个红球与都是黑球　　B. 至少有一个黑球与都是黑球

C. 至少有一个黑球与至少有 1 个红球　　　　D. 恰有 1 个黑球与恰有 2 个黑球

【答案】D

【解析】

【分析】根据互斥事件以及对立事件的定义逐一判断四个选项的正误即可得正确选项.

【详解】从装有 2 个红球和 2 个黑球的口袋内任取 2 个球，可能为：1 红 1 黑、2 红、2 黑，

对于 A：至少有一个红球包括 1 红 1 黑、2 红，与都是黑球是对立事件，不符合题意，故选项 A 不正确；

对于 B：至少有一个黑球包括 1 红 1 黑、2 黑，与都是黑球不是互斥事件，不符合题意，故选项 B 不正确；

对于 C：至少有一个黑球包括 1 红 1 黑、2 黑，至少有 1 个红球包括 1 红 1 黑、2 红，这两个事件不是互斥事件，不符合题意，故选项 C 不正确；

对于 D：恰有 1 个黑球与恰有 2 个黑球是互斥事件而不是对立事件，符合题意，故选项 D 正确；

故选：D.

4. 在等差数列 $\left\{a_n\right\}$ 中，$S_{11}=33$，则 $a_5+a_8-\dfrac{1}{3}a_9=$（　）

A. 5　　　　B. 4　　　　C. 3　　　　D. 2

【答案】A

【解析】

【分析】根据等差数列求和公式得到 $a_1+5d=3$，进而由等差数列通项公式基本量计算出答案.

【详解】设公差为 d，$S_{11}=33$，即 $11a_1+\dfrac{11\times 10}{2}d=33$，故 $a_1+5d=3$，

$$a_5+a_8-\frac{1}{3}a_9=a_1+4d+a_1+7d-\frac{1}{3}\left(a_1+8d\right)=\frac{5}{3}\left(a_1+5d\right)=\frac{5}{3}\times 3=5.$$

故选：A

5. 已知 m,n,a,b 是两条不重合的直线，α，β 是两个不重合的平面，则下列说法正确的是（　）

A. 若 $m\perp\alpha,n//\beta,\alpha\perp\beta$，则 $m\perp n$

B. 若 $m\perp n$，$m\perp\alpha$，$n//\beta$，则 $\alpha\perp\beta$

C. 若 $m//n$，$m//\alpha$，$n//\beta$，则 $\alpha//\beta$

D. 若 $a//\alpha$，$a\subset\beta$，$\alpha\cap\beta=b$，则 $a//b$

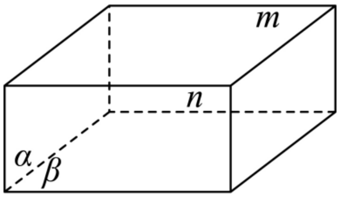
【答案】D

【解析】

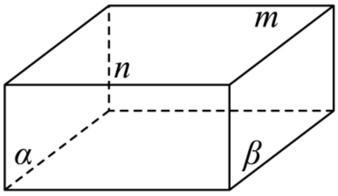
【分析】利用空间线、面平行或垂直的判定与性质，对每个选项逐一判断，通过举反例可判断 ABC，由线

面平行的性质可判断 D.

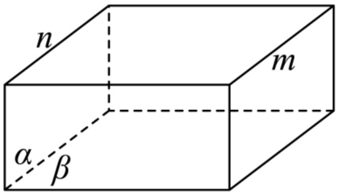
【详解】对于 A，如图所示：$m\perp\alpha$，$n//\beta$，$\alpha\perp\beta$，但$n//m$，故 A 错误；



对于 B.，如图所示：满足 $m\perp n$，$m\perp\alpha$，$n//\beta$ ，但$\alpha//\beta$，故 B 错误；



对于 C，满足$m//n$，$m//\alpha$，$n//\beta$，但α,β不平行，故 C 错误；



对于 D，$a//\alpha$，$a\subset\beta$，$\alpha\cap\beta=b$ ，由线面平行的性质可和$a//b$，故 D 正确.

故选：D.

6. 已知函数 $f(x)=\sin\left[3\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)\right](\omega>0)$ 的最小正周期为 π，则 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}\right]$ 的最小值为（　　）

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $-\frac{3}{2}$　　C. 0　　D. $\frac{3}{2}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据最小正周期可以求出参数ω，再结合函数的单调性求出最值.

【详解】化简原函数得 $f(x)=\sin(3\omega x+\pi)$，即 $f(x)=-\sin 3\omega x$

由函数的最小正周期为π，可得$T=\frac{2\pi}{|3\omega|}=\pi$，所以$\omega=\pm\frac{2}{3}$.

因为$\omega>0$，所以$\omega=\frac{2}{3}$时，则 $f(x)=-\sin 2x$，

由 $x\in\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}\right]$，得 $2x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$，$\sin 2x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$，

所以 $f(x)_{min}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，故选 A.

7. 定义在 R 上函数满足 $f(x+1)=\frac{1}{2}f(x)$，且当 $x\in[0,1)$ 时，$f(x)=1-|2x-1|$.则使得 $f(x)\le\frac{1}{16}$ 在 $[m,+\infty)$ 上恒成立　m 的最小值是（　　）

A. $\frac{7}{2}$　　B. $\frac{9}{2}$　　C. $\frac{13}{4}$　　D. $\frac{15}{4}$

【答案】D

【解析】

【分析】由题意可得，在区间 $[n,n+1)(n\in Z)$ 上，$f(x)=\frac{1}{2^n}\left[1-|2x-(2n+1)|\right]\le\frac{1}{2^n}$，作函数 $y=f(x)$ 的图象，如图所示，然后结合图像可求出 m 的最小值

【详解】根据题设可知，当 $x\in[1,2)$ 时，$x-1\in[0,1)$，故 $f(x)=\frac{1}{2}f(x-1)=\frac{1}{2}(1-|2x-3|)$，

同理可得：在区间 $[n,n+1)(n\in Z)$ 上，$f(x)=\frac{1}{2^n}\left[1-|2x-(2n+1)|\right]\le\frac{1}{2^n}$，

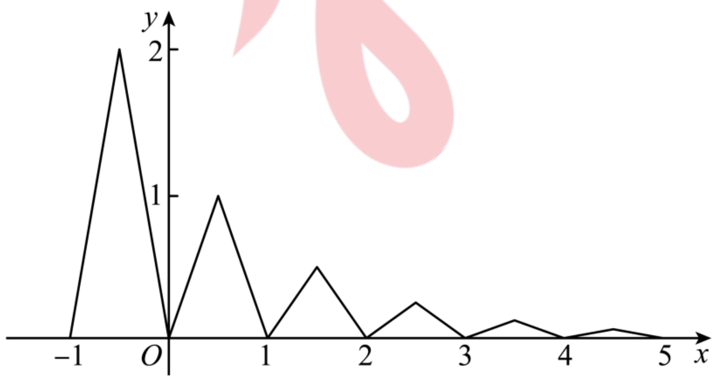
所以当 $n\ge4$ 时，$f(x)\le\frac{1}{16}$.

作函数 $y=f(x)$ 的图象，如图所示.

在 $\left[\frac{7}{2},4\right)$ 上，由 $f(x)=\frac{1}{8}\left[1-|2x-7|\right]=\frac{1}{16}$，得 $x=\frac{15}{4}$.

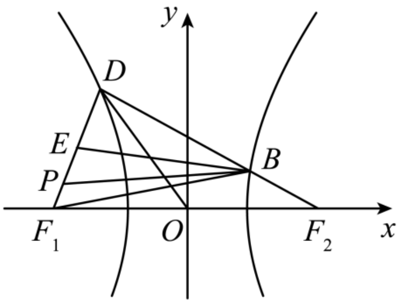
由图象可知当 $x\ge\frac{15}{4}$ 时，$f(x)\le\frac{1}{16}$.

故选：D.



【点睛】此题考查函数在给定区间上恒成立问题，考查数形结合思想，属于中档题

8. 如图，F_1，F_2为双曲线的左右焦点，过F_2的直线交双曲线于B，D两点，$|OD|=3$，E为线段的DF_1中点，若对于线段DF_1上的任意点P，都有$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PB}\geq\overrightarrow{EF_1}\cdot\overrightarrow{EB}$成立，且$\triangle BF_1F_2$内切圆的圆心在直线$x=2$上.则双曲线的离心率是（　　）



A. $\frac{4}{3}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. $\frac{3}{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】由$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PB}\geq\overrightarrow{EF_1}\cdot\overrightarrow{EB}$可得$DF_1\perp DF_2$.由$|OD|=3$，可得$|F_1F_2|=6$.

又由$\triangle BF_1F_2$内切圆的圆心在直线$x=2$上，可得$a=2$，据此可得答案.

【详解】如图1，取BF_1中点为Q，连接EQ，PQ.则

$$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PB}=\frac{1}{4}\left[\left(\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PB}\right)^2-\left(\overrightarrow{PF_1}-\overrightarrow{PB}\right)^2\right]=\frac{1}{4}\left(4\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2-\left|\overrightarrow{BF_1}\right|^2\right)=\left|PQ\right|^2-\frac{1}{4}\left|BF_1\right|^2,$$

$$\overrightarrow{EF_1}\cdot\overrightarrow{EB}=\frac{1}{4}\left[\left(\overrightarrow{EF_1}+\overrightarrow{EB}\right)^2-\left(\overrightarrow{EF_1}-\overrightarrow{EB}\right)^2\right]=\frac{1}{4}\left(4\left|\overrightarrow{EQ}\right|^2-\left|\overrightarrow{BF_1}\right|^2\right)=\left|EQ\right|^2-\frac{1}{4}\left|BF_1\right|^2.$$

因$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PB}\geq\overrightarrow{EF_1}\cdot\overrightarrow{EB}$，则

$\left|PQ\right|^2-\frac{1}{4}\left|BF_1\right|^2\geq\left|EQ\right|^2-\frac{1}{4}\left|BF_1\right|^2\Rightarrow\left|PQ\right|^2\geq\left|EQ\right|^2\Rightarrow\left|PQ\right|\geq\left|EQ\right|$，因直线外一点到直线连线中垂线段最短，则$EQ$为$DF_1$垂线.因$Q$为$BF_1$中点，$E$为$DF_1$中点，则

EQ □ DF_2，得$DF_1\perp DF_2$.又DO为直角三角形斜边F_1F_2中线，则$\left|F_1F_2\right|=2c=6\Rightarrow c=3$.

如图2，设$\triangle BF_1F_2$内切圆的圆心为I，内切圆与F_1F_2交点为M，与BF_1交点为T，与BF_2交点为N.则

$IM\perp F_1F_2$，$|OM|=2$，又$\left|OF_1\right|=\left|OF_2\right|=3$，则$|MF_1|-|MF_2|=4$.

又由切线性质，可知$\left|BT\right|=\left|BN\right|$，$\left|F_1T\right|=\left|F_1M\right|$，$\left|F_2M\right|=\left|F_2N\right|$，则

$\left|BF_1\right|-\left|BF_2\right|=\left|TF_1\right|-\left|NF_1\right|=\left|F_1M\right|-\left|F_2M\right|=2a=4\Rightarrow a=2$.

则离心率为$e=\frac{c}{a}=\frac{3}{2}$.

故选：D

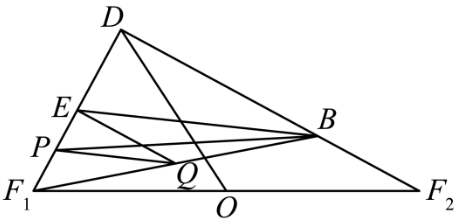


图1

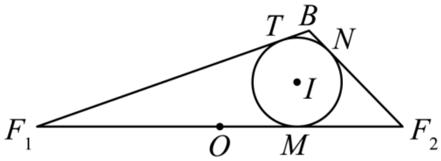


图2

【点睛】结论点睛：本题涉及以下结论：

（1）极化恒等式：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{4}\left[\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2-\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2\right]$；

（2）双曲线焦点三角形的内切圆圆心在直线$x=a$上.

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，有二个正确选项的，每个选项 3 分，有三个正确选项的，每个选项 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知高二（1）（2）（3）班三个班的学生人数之比为 3∶3∶4.在某次数学考试中，高二（1）班的不及格率为 10%，高二（2）班的不及格率为 20%，高二（3）班的不及格率为 15%，从三个班随机抽取一名学生.记事件A=“该学生本次数学考试不及格”，事件B_i=“该学生在高二（i）班”（$i=1$，2，3），则（　　）

A. $P\left(B_i\right)=0.3$

B. $P\left(A\right)=0.15$

C. A 与B_3相互独立

D. $\frac{P\left(B_1|A\right)}{P\left(B_3|A\right)}=\frac{1}{2}$

【答案】BCD

【解析】

【分析】利用古典概型的概率计算公式可判断 A；根据全概率公式可判断 B；根据独立事件的概率乘法公式可判断 C；根据条件概率公式计算结论可判断 D.

【详解】对于 A，$P\left(B_1\right)=\frac{3}{3+3+4}=0.3$，$P\left(B_2\right)=\frac{3}{3+3+4}=0.3$，$P\left(B_3\right)=\frac{4}{3+3+4}=0.4$，故 A 错误；

对于 B，由题意，$P(A|B_1)=0.1$，$P(A|B_2)=0.2$，$P(A|B_3)=0.15$，

$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)=0.15$，故 B 正确；

对于 C，由 $P(A)=P(A|B_3)=0.15$，则 $P(AB_3)=P(A|B_3)P(B_3)=P(A)P(B_3)$，

即 A 与 B_3 相互独立，故 C 正确；

对于 D，$P(B_1|A)=\dfrac{P(AB_1)}{P(A)}=\dfrac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)}=\dfrac{1}{5}$，$P(B_3|A)=\dfrac{P(AB_3)}{P(A)}=\dfrac{P(A|B_3)P(B_3)}{P(A)}=\dfrac{2}{5}$，

$\dfrac{P(B_1|A)}{P(B_3|A)}=\dfrac{1}{2}$，故 D 正确.

故选：BCD.

10. 若$\triangle ABC$的内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且满足 $b-3a+6a\sin^2\dfrac{A+B}{2}=0$，则下列结论正确的是（　　）

A. 角 C 一定为锐角　　B. $3a^2+5b^2=3c^2$　　C. $4\tan A+\tan C=0$　　D. $\tan B$ 的最大值为 $\dfrac{3}{4}$

【答案】BCD

【解析】

【分析】先由倍角公式化简得 $\cos C=-\dfrac{b}{3a}$ 即可判断 A 选项；由余弦定理即可判断 B 选项；由正弦定理即及和角公式可判断 C 选项；由正切和角公式及基本不等式即可判断 D 选项.

【详解】由 $b-3a+6a\sin^2\dfrac{A+B}{2}=0$ 可得 $b-3a+6a\times\dfrac{1-\cos(A+B)}{2}=0$，又 $A+B=\pi-C$，故

$b-3a+3a+3a\cos C=0$，

$\cos C=-\dfrac{b}{3a}<0$，故 C 为钝角，A 错误；

又由余弦定理，$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=-\dfrac{b}{3a}$，化简得 $3a^2+5b^2=3c^2$，B 正确；

由正弦定理 $\cos C=-\dfrac{\sin B}{3\sin A}$，即 $3\sin A\cos C+\sin B=0$，又 $A+C=\pi-B$，故

$3\sin A\cos C+\sin(A+C)=0$，

即 $4\sin A\cos C+\sin C\cos A=0$，即 $4\tan A+\tan C=0$，C 正确；

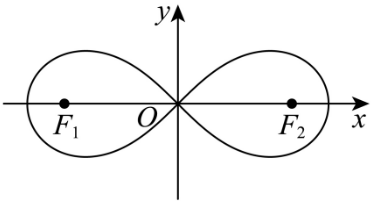
由上知，C 为钝角，故 $A\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\tan A>0$，

$\tan B=-\tan\left(A+C\right)=\dfrac{\tan A+\tan C}{\tan A\tan C-1}=\dfrac{\tan A-4\tan A}{\tan A\cdot\left(-4\tan A\right)-1}=$

$\dfrac{3\tan A}{4\tan^2 A+1}=\dfrac{3}{4\tan A+\dfrac{1}{\tan A}}\le\dfrac{3}{2\sqrt{4\tan A\cdot\dfrac{1}{\tan A}}}=\dfrac{3}{4}$，当且仅当 $4\tan A=\dfrac{1}{\tan A}$，即 $\tan A=\dfrac{1}{2}$ 时取等，D 正确.

故选：BCD.

11. 双纽线，也称伯努利双纽线，伯努利双纽线的描述首见于 1694 年，雅各布·伯努利将其作为椭圆的一种类比来处理．椭圆是由到两个定点距离之和为定值的点的轨迹，而卡西尼卵形线则是由到两定点距离之乘积为定值的点的轨迹，当此定值使得轨迹经过两定点的中点时，轨迹便为伯努利双纽线．已知曲线 C（如图所示）过坐标原点 O，且 C 上的点 $P\left(x,y\right)$ 满足到两个定点 $F_1\left(-a,0\right)$，$F_2\left(a,0\right)(a>0)$ 的距离之积为 4，则下列结论正确的是（　）



A. $a=2$

B. 点 $M\left(x,1\right)(x>0)$ 在 C 上，则 $|MF_1|=2\sqrt{2}$

C. 点 N 在椭圆 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 上，若 $F_1N\perp F_2N$，则 $N\in C$

D. 过 F_2 作 x 轴的垂线交 C 于 A，B 两点，则 $|AB|<2$

【答案】ACD

【解析】

【分析】根据题目给的伯努利双纽线的概念，结合圆锥曲线中的焦点概念，直线与圆锥曲线的关系，分别判断各选项的正误.

【详解】由题意，$\left|PF_1\right|\cdot\left|PF_2\right|=4$，即 $\sqrt{(x+a)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-a)^2+y^2}=4$，

对于 A，因曲线 C 过原点 O，将 $O\left(0,0\right)$ 代入，解得 $a=2$，故 A 正确；

对于 B，由点 $M\left(x,1\right)(x>0)$ 在 C 上，得 $|MF_1||MF_2|=\sqrt{\left[(x+2)^2+1\right]\left[(x-2)^2+1\right]}=4$，

化简得 $x^4-6x^2+9=0$，解得 $x=\sqrt{3},|MF_1|=\sqrt{(\sqrt{3}+2)^2+1}\ne2\sqrt{2}$，故 B 错误；

对于C，椭圆$\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1$的焦点坐标恰好为$F_1(-2,0)$与$F_2(2,0)$，则$|F_1N|+|F_2N|=2\sqrt{6}$，

由$F_1N\perp F_2N$，得：$|F_1N|^2+|F_2N|^2=16$，

则$|F_1N|\cdot|F_2N|=\dfrac{(|F_1N|+|F_2N|)^2-(|F_1N|^2+|F_2N|^2)}{2}=4$，$N\in C$，故C正确；

对于D，设$A(2,y)$，则$|AB|=2|y|$，而$A\in C$，则$|AF_1|=\dfrac{4}{|y|}$，

又根据勾股定理得$|AF_1|^2=16+y^2$，则$\dfrac{16}{y^2}=16+y^2$，化简得$y^4+16y^2-16=0$，

解得$y^2=4\sqrt{5}-8, y^2-1=4\sqrt{5}-9<0$，因此$|y|<1, |AB|<2$，故D正确；

故选：ACD.

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分.

12. 已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$a_{n+1}=3a_n-2$，$n\in \mathbf{N}_+$，则数列$\{a_n\}$的通项公式为______.

【答案】$a_n=1+3^{n-1}$

【解析】

【分析】结合给定递推关系构造等比数列，进而求出$a_n=1+3^{n-1}$即可.

【详解】由$a_{n+1}=3a_n-2$，得$a_{n+1}-1=3(a_n-1)$，

由于$a_1-1=1\neq 0$，因此$\{a_n-1\}$是首项为1，公比为3的等比数列，

从而可得$a_n-1=3^{n-1}\times 1=3^{n-1}$，则$a_n=1+3^{n-1}$.

故答案为：$a_n=1+3^{n-1}$.

13. 甲、乙、丙等8名同学将作为志愿者参加三个养老院的志愿服务工作，每个养老院至少安排2名志愿者，每名志愿者只能去一个养老院，且甲、乙、丙三人必须在同一养老院进行志愿服务，则有________种不同的分配方案.

【答案】150

【解析】

【分析】根据不同的人数分配比例分别计算分配方案数，再将两种情况的方案数相加得到总的分配方案数.

【详解】依题意，人数的分配有$4:2:2$和$3:3:2$两种，

若是$4:2:2$，则有$C_5^1\cdot\dfrac{C_4^2C_2^2}{A_2^2}\cdot A_3^3=90$种，

若是$3:3:2$，则有$C_5^3\cdot A_3^3=60$种，则共有150种不同的分配方案.

故答案　：150.

14. 若函数$f\left(x\right)=\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{1+a}{2}x^2+ax\ln x-ax$有两个极值点，则$a$的取值范围是_____.

【答案】$\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$

【解析】

【分析】令$f'\left(x\right)=0$得$2a=\dfrac{2x-x^2}{\ln x-x}$，令$g\left(x\right)=\dfrac{2x-x^2}{\ln x-x},x\in\left(0,+\infty\right)$，将函数$f\left(x\right)$的零点问题转化为$g\left(x\right)$的图象和直线$y=2a$的交点问题，利用导数判断出$g\left(x\right)$的单调性，结合图象可得答案.

【详解】$f\left(x\right)$的定义域为$\left(0,+\infty\right)$, $f'\left(x\right)=\dfrac{x^2}{2}-\left(1+a\right)x+a\ln x$，

因为$f\left(x\right)$有两个极值点，所以函数$f'\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上有两个变号零点，

令$f'\left(x\right)=\dfrac{x^2}{2}-\left(1+a\right)x+a\ln x=0$，则$\dfrac{x^2}{2}-x-ax+a\ln x=0$，

即$x^2-2x-2ax+2a\ln x=0$，所以$2a=\dfrac{2x-x^2}{\ln x-x}$，令$g\left(x\right)=\dfrac{2x-x^2}{\ln x-x},x\in\left(0,+\infty\right)$，

所以将函数$f\left(x\right)$的零点问题转化为$g\left(x\right)$的图象和直线$y=2a$的交点问题，

求导得$g'\left(x\right)=\dfrac{\left(2-2x\right)\left(\ln x-x\right)-\left(2x-x^2\right)\left(\dfrac{1-x}{x}\right)}{\left(\ln x-x\right)^2}=\dfrac{\left(1-x\right)\left(2\ln x-x-2\right)}{\left(\ln x-x\right)^2}$，

令$h\left(x\right)=2\ln x-x-2,x\in\left(0,+\infty\right)$，则$h'\left(x\right)=\dfrac{2-x}{x}$，

易知$h\left(x\right)$在$\left(0,2\right)$上单调递增，在$\left(2,+\infty\right)$上单调递减，

$h\left(x\right)\le h\left(2\right)=2\ln 2-4<0$，则$h\left(x\right)<0$恒成立，

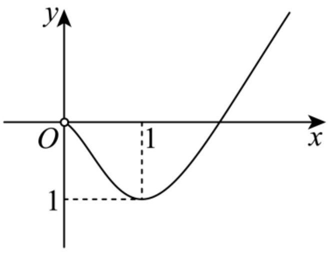
所以当$0<x<1$时，$g'\left(x\right)<0,g\left(x\right)$在$\left(0,1\right)$上单调递减；

当$x>1$时，$g'\left(x\right)>0,g\left(x\right)$在$\left(1,+\infty\right)$上单调递增，

所以 $g(x)_{\min}=g(1)=-1$，又因为 $x\to 0,g(x)\to 0$；$x\to+\infty$，$g(x)\to+\infty$，

则 $g(x)$ 的图象如图所示，要使 $g(x)$ 的图象和直线 $y=2a$ 有两个交点，

由图象知 $-1<2a<0$，即 $-\frac{1}{2}<a<0$，所以 a 的取值范围为 $\left(-\frac{1}{2},0\right)$.



四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知 $b=2a\cos\left(C-\frac{\pi}{3}\right)$.

（1）求 A；

（2）若 $b=2\sqrt{3}c$，且 $\triangle ABC$ 面积 $2\sqrt{3}$，

（i）求 a 的值；

（ii）求 $\cos(2B-A)$.

【答案】（1）$\frac{\pi}{6}$

（2）（i）$2\sqrt{7}$　（ii）$-\frac{3\sqrt{3}}{14}$

【解析】

【分析】（1）由正弦定理，三角函数恒等变换的应用化简已知等式可得 $\tan A=\frac{\sqrt{3}}{3}$，结合范围 $A\in(0,\pi)$，可求 A 的值.

（2）（i）由已知利用三角形的面积公式可求 c 的值，进而可求 b 的值，根据余弦定理可得 a 的值；（ii）由余弦定理求得 $\cos B$，进而可得 $\sin B$，再根据两角差余弦及二倍角公式求解即可.

【小问 1 详解】

因为 $b=2a\cos\left(C-\frac{\pi}{3}\right)$，

所以 $b=2a\left(\cos C\cos\frac{\pi}{3}+\sin C\sin\frac{\pi}{3}\right)$，可得：$b=a\cos C+\sqrt{3}a\sin C$，

由正弦定理可得：$\sin B=\sin A\cos C+\sqrt{3}\sin A\sin C$，

可得：$\sin\left(A+C\right)=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\sin A\cos C+\sqrt{3}\sin A\sin C$，

因为$C\in\left(0,\pi\right)$，所以$\sin C\neq 0$，

所以$\cos A=\sqrt{3}\sin A$，即$\tan A=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

因为$A\in\left(0,\pi\right)$，所以$A=\dfrac{\pi}{6}$

【小问 2 详解】

（i）因为$b=2\sqrt{3}c$，且$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=2\sqrt{3}$，

解得：$c=2$，$b=4\sqrt{3}$，

由余弦定理可得：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=48+4-2\times 4\sqrt{3}\times 2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=28$，解得：$a=2\sqrt{7}$；

（ii）由余弦定理可得$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{28+4-48}{2\times 2\sqrt{7}\times 2}=-\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$，

所以$\sin B=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$，$\cos 2B=2\cos^2 B-1=\dfrac{1}{7}$，$\sin 2B=2\sin B\cos B=-\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$，

所以$\cos\left(2B-A\right)=\cos 2B\cos A+\sin 2B\sin A=\dfrac{1}{7}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{4\sqrt{3}}{7}\times\dfrac{1}{2}=-\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$.

16. 已知函数$f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}x^2-a\ln x+a^3,a\in\mathbf{R}$.

（1）当$a=1$时，求曲线$y=f\left(x\right)$在点$\left(2,f\left(2\right)\right)$处的切线方程；

（2）若$f\left(x\right)$有极小值，且$f\left(x\right)\geq 2a^3-\dfrac{a}{2}$，求$a$的取值范围.

【答案】（1）$y=\dfrac{3}{2}x-\ln 2$

（2）$\left(0,1\right]$

【解析】

【分析】（1）当$a=1$时，$f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}x^2-\ln x+1$，求导得$f'\left(x\right)=x-\dfrac{1}{x}$，根据导数的几何意义，得到切线方程的斜率，再结合切线方程过定点$\left(2,f\left(2\right)\right)$得到切线方程.

（2）根据函数$f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}x^2-a\ln x+a^3,a\in\mathbf{R}$得到函数的定义域为$x>0$，对$f\left(x\right)$求导，讨论$a$的范围，

结合导数判断函数的单调性，确定函数是否存在极小值，结合题给条件 $f(x)\ge 2a^3-\frac{a}{2}$ 得到关于 a 的不等式，构造关于 a 的新函数，求导判断函数单调性，解不等式求解.

【小问 1 详解】

因为 $a=1$，所以 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\ln x+1$，

求导得 $f'(x)=x-\frac{1}{x}$

所以 $f'(2)=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，

又因为 $f(2)=3-\ln 2$，

故曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线方程为 $y=\frac{3}{2}x-\ln 2$.

【小问 2 详解】

由函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-a\ln x+a^3,a\in\mathbf{R}$ 可知， $x>0$.

求导得： $f'(x)=x-\frac{a}{x}=\frac{x^2-a}{x}$ ，

当 $a\le 0$ 时，因为 $x>0$，所以 $f'(x)>0$，

此时 $y=f(x)$ 为单调递增函数，没有极小值，与题意不符；

当 $a>0$ 时， $f'(x)=x-\frac{a}{x}=\frac{(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})}{x}$ ，

因为 $x>0$，所以当 $x\in(0,\sqrt{a})$ 时， $f'(x)<0$，当 $x\in(\sqrt{a},+\infty)$ 时， $f'(x)>0$，

所以函数 $f(x)$ 有极小值为 $f(\sqrt{a})=\frac{1}{2}a-a\ln\sqrt{a}+a^3=\frac{1}{2}a-\frac{a}{2}\ln a+a^3$.

又 $f(x)\ge 2a^3-\frac{a}{2}$， 所以 $f(\sqrt{a})\ge 2a^3-\frac{a}{2}$， 即 $a^3+\frac{a}{2}\ln a-a\le 0$，

因为 $a>0$，所以 $2a^2+\ln a-2\le 0$.

设 $h(a)=2a^2+\ln a-2$， 则 $h'(a)=4a+\frac{1}{a}>0$，

所以 $h(a)=2a^2+\ln a-2$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

又 $h(1)=0$， 所以 $2a^2+\ln a-2\le 0$ 的解集为 $(0,1]$， 即 a 的取值范围是 $(0,1]$.

17. 已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右焦点分别为 F_1，F_2，离心率为 $\frac{1}{2}$，且点 $(\frac{2\sqrt{3}}{3},\sqrt{2})$ 在 E 上.

（1）求椭圆 E 的方程；

（2）过点 $B(1,0)$ 作直线 l 交椭圆 E 于 M,N 两点，且点 M 位于 x 轴上方，设点 N 关于 x 轴的对称点为 N_1，求 $\triangle BMN_1$ 面积的最大值.

【答案】（1）$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$；

（2）$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

【解析】

【分析】（1）由给定的离心率及点，列出方程组求出 a^2,b^2 即可.

（2）设出直线 l 方程，与椭圆方程联立，利用韦达定理求出三角形面积的函数关系，再利用基本不等式求出最大值.

【小问 1 详解】

由椭圆 E 的离心率为 $\frac{1}{2}$，得 $\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\dfrac{1}{2}$，即 $a^2=\dfrac{4}{3}b^2$，

由点 $(\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\sqrt{2})$ 在 E 上，得 $\dfrac{4}{3a^2}+\dfrac{2}{b^2}=1$，解得 $a^2=4,b^2=3$，

所以椭圆 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

【小问 2 详解】

依题意，直线 l 不垂直于坐标轴，设直线 l 方程为 $x=ty+1$，$t\neq 0$，

设点 $N(x_1,y_1),M(x_2,y_2),y_2>0$，则 $N_1(x_1,-y_1)$，$|NN_1|=-2y_1$，

由 $\begin{cases}x=ty+1\\3x^2+4y^2=12\end{cases}$ 消去 x 得 $(4+3t^2)y^2+6ty-9=0$，$\Delta=36\left(4+4t^2\right)>0$，

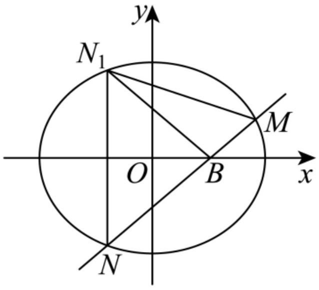
$y_1+y_2=-\dfrac{6t}{4+3t^2},y_1y_2=\dfrac{-9}{4+3t^2}$，

所以 $S_{\triangle BMN_1}=|S_{\triangle MNN_1}-S_{\triangle BNN_1}|=\dfrac{1}{2}|NN_1||x_2-x_1|-\dfrac{1}{2}|NN_1||1-x_1|$

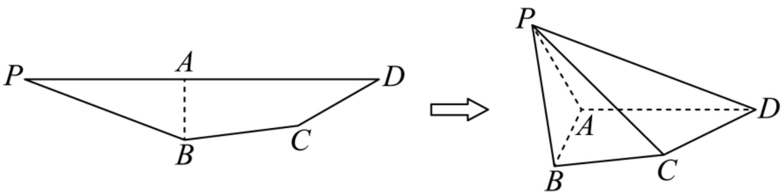
$=\dfrac{1}{2}|2y_1||x_2-1|=\dfrac{1}{2}(-2y_1)|x_2-1|=-y_1|ty_2+1-1|$

$=-y_1y_2|t|=\dfrac{9|t|}{4+3t^2}\le\dfrac{9|t|}{4\sqrt{3}|t|}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$，当且仅当 $3t^2=4$，即 $|t|=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ 时取等号，

所以$\triangle BMN_1$面积的最大值为$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.



18. 如图，平面四边形$PBCD$中，点A是线段PD上一点，$AB\perp PD$，且$PD=4$，$CD=\sqrt{2}$，$\angle ADC$=45°，沿着AB将三角形PAB折叠得到四棱锥$P-ABCD$，折叠后$\angle PAD=120°$.



（1）求证：平面$PAD\perp$平面$ABCD$；

（2）若$AP=AD$，求平面PCD与平面$ABCD$夹角的正切值；

（3）若P，A，C，D在同一个球面上，设该球面的球心为G，证明：当球G的半径最小时，点G在平面PAD内.

【答案】（1）证明见解析

（2）$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

（3）证明见解析

【解析】

【分析】（1）由图翻折可知$AB\perp PA$，$AB\perp AD$，再利用面面垂直的判定证明即可；

（2）过点A作$AE\perp AD$交PD于E，通过证明$CD\perp$平面AEC，得到$\angle ECA$为二面角$P-CD-A$的平面角，再求正切值即可；

（3）设$\triangle PAD$和□ACD的外心分别M和F，则球心为过点M和N且分别垂直于平面PAD、平面ACD的两直线的交点G，过点N作$NH\perp AD$于H，连接MH，可知四边形$GNHM$为矩形，设$AP=t$，通过计算可得外接球半径$R^2=\dfrac{7}{12}(t-2)^2+4$，当$t=2$时，球$G$的半径最小，此时点$G$与点$M$重合即可证明.

【小问1详解】

在四边形$PBCD$中，因为$AB\perp PD$，所以折叠后有$AB\perp PA$，$AB\perp AD$.

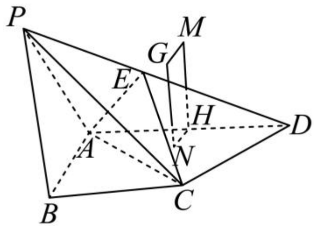
又 $PA \cap AD = A$， $AD \subset$ 平面 PAD， $PA \subset$ 平面 PAD，所以 $AB \perp$ 平面 PAD.

又 $AB \subset$ 平面 $ABCD$，所以平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$.

小问 2 详解】

由题意 $AD = AP = 2$，又 $\angle PAD = 120°$，故 $\angle PDA = 30°$，

过点 A 作 $AE \perp AD$ 交 PD 于 E，则 $AE = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，连接 AC， EC，



因为平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$，面 $PAD \perp$ 面 $ABCD = AD$， $AE \subset$ 平面 PAD，

且 $AE \perp AD$，所以 $AE \perp$ 平面 $ABCD$.

因为 $CD \subset$ 平面 $ABCD$，所以 $AE \perp CD$，同理 $AE \perp AC$，

因为 $AD = 2$， $CD = \sqrt{2}$， $\angle ADC$=45°，所以由余弦定理得

$CA = \sqrt{AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD\cos\angle ADC} = \sqrt{2}$，

所以 $CD \perp CA$，

因为 $CA \cap AE = A$， $CA \subset$ 平面 AEC， $AE \subset$ 平面 AEC，所以 $CD \perp$ 平面 AEC.

因为 $EC \subset$ 平面 AEC，所以 $CD \perp EC$，所以 $\angle ECA$ 为二面角 $P-CD-A$ 的平面角.

所以在 $\mathrm{Rt}\triangle EAC$ 中， $\tan\angle ECA = \dfrac{AE}{CA} = \dfrac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

所以平面 PCD 与平面 $ABCD$ 夹角的正切值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

【小问 3 详解】

由（1）知平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$，

设 $\triangle PAD$ 和□ACD 的外心分别 M 和 F，

因为 P 、 A 、 C 、 D 均在以 G 为球心的球面上，

则球心为过点 M 和 N 且分别垂直于平面 PAD 、平面 ACD 的两直线的交点 G，

过点 N 作 $NH \perp AD$ 于 H，连接 MH，

设 $PG = R$，显然四边形 $GNHM$ 为矩形，

所以$GM^2=PG^2-PM^2=NH^2=DN^2-DH^2$.

在$\triangle PAD$中，设$AP=t$（$0<t<3$），

由$\angle PAD=120°$及余弦定理得$PD=\sqrt{t^2-4t+16}$，

再由正弦定理得$\triangle PAD$的外接圆半径$r_1=PM=\dfrac{PD}{2\sin120°}=\sqrt{\dfrac{t^2-4t+16}{3}}$.

在□ACD中，$AD=4-t$，$CD=\sqrt{2}$，$\angle ADC=45°$，

由余弦定理得$AC=\sqrt{t^2-6t+10}$，

再由正弦定理得□ACD的外接圆半径$r_2=DN=\dfrac{AC}{2\sin45°}=\sqrt{\dfrac{t^2-6t+10}{2}}$.

所以$R^2-r_1^2=r_2^2-\left(\dfrac{AD}{2}\right)^2$，

即$R^2=r_1^2+r_2^2-\left(\dfrac{AD}{2}\right)^2=\dfrac{t^2-4t+16}{3}+\dfrac{t^2-6t+10}{2}-\dfrac{t^2-8t+16}{4}$，

所以$R^2=\dfrac{7t^2-28t+76}{12}=\dfrac{7}{12}(t-2)^2+4$，故当$t=2$时，球$G$的半径最小，

此时点G与点M重合，所以点G在平面PAD内.

19. 甲、乙两人比赛，比赛规则为：共进行奇数局比赛，全部比完后，所赢局数多者获胜.假设每局比赛甲赢的概率都是p（$0<p<1$），各局比赛之间的结果互不影响，且没有平局.

（1）$p=\dfrac{1}{2}$，若两人共进行5局比赛，设两人所赢局数之差的绝对值为X，求X的分布列和数学期望；

（2）$p=\dfrac{2}{3}$时，若两人共进行$2n+1$（$n\in\mathbf{N}^*$且$n\geq2$）局比赛，记事件A_k表示“在前$2n-1$局比赛中甲赢了$k\left(k=0,1,2,\cdots,2n-1\right)$局”.事件$B$表示“甲最终获胜”.请写出$P\left(B\middle|\sum_{k=0}^{n-2}A_k\right)$，$P\left(B|A_{n-1}\right)$，$P\left(B|A_n\right)$，$P\left(B\middle|\sum_{k=n+1}^{2n-1}A_k\right)$的值（直接写出结果即可）；

（3）若两人共进行了$2n-1\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$局比赛，甲获胜的概率记为$P_n$.证明：$\dfrac{1}{2}<p<1$时，$P_{n+2}-P_{n+1}<P_{n+1}-P_n$.

【答案】（1）分布列见解析，$E\left(X\right)=\dfrac{15}{8}$

（2）$P\left(B|\sum_{k=0}^{n-2}A_k\right)=0$，$P\left(B|A_{n-1}\right)=\frac{4}{9}$，$P\left(B|A_n\right)=\frac{8}{9}$，$P\left(B|\sum_{k=n+1}^{2n-1}A_k\right)=1$

（3）证明见解析

【解析】

【分析】（1）求出 X 的可能取值和对应的概率，得到分布列和数学期望；

（2）分析可得 $0\le k\le n-2$ 时，$k<k+1<k+2\le n<\frac{2n+1}{2}$，故乙最终获胜，则 $P\left(B|\sum_{k=0}^{n-2}A_k\right)=0$，同理求出其他的条件概率；

（3）在（2）的基础上，结合全概率公式可得 $P_{n+1}=P_n+C_{2n-1}^{n}p^n(1-p)^n(2p-1)$，故 $P_{n+1}-P_n=C_{2n-1}^{n}p^n(1-p)^n(2p-1)$，当 $\frac{1}{2}<p<1$ 时，$P_{n+1}-P_n>0$，在利用作商法和基本不等式得到 $\frac{P_{n+2}-P_{n+1}}{P_{n+1}-P_n}<4p(1-p)\leqslant 1$，最终证明出结论.

【小问 1 详解】

X 的可能取值为 1，3，5，$P(X=1)=C_5^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times 2=\frac{5}{8}$，

$P(X=3)=C_5^1\times\left(\frac{1}{2}\right)^1\times\left(\frac{1}{2}\right)^4\times 2=\frac{5}{16}$，$P(X=5)=\left(\frac{1}{2}\right)^5\times 2=\frac{1}{16}$，

X 的分布列为：

X	1	3	5
P	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{16}$

$E(X)=1\times\frac{5}{8}+3\times\frac{5}{16}+5\times\frac{1}{16}=\frac{15}{8}$；

小问 2 详解】

当 $0\le k\le n-2$ 时，$k<k+1<k+2\le n<\frac{2n+1}{2}$，

故乙最终获胜，则 $P\left(B|\sum_{k=0}^{n-2}A_k\right)=0$，

当 $k=n-1$ 时，$k<k+1=n<\frac{2n+1}{2}$，$k+2=n+1>\frac{2n+1}{2}$，

故只有最后两场甲全赢才能最终获胜，故 $P\left(B|A_{n-1}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$，

当 $k=n$ 时，$k=n<\frac{2n+1}{2}$，$k+2>k+1=n+1>\frac{2n+1}{2}$，

最后两场甲至少赢一场才能最终获胜，故 $P(B|A_n)=C_2^1\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$，

当 $n+1\le k\le 2n-1$ 时，$k+2>k+1>k\ge n+1>\frac{2n+1}{2}$，

故甲最终获胜，故 $P\left(B|\sum\limits_{k=n+1}^{2n-1}A_k\right)=1$；

【小问 3 详解】

证明：结合（2），由全概率公式得：

$$P_{n+1}=C_{2n-1}^{n-1}p^{n-1}(1-p)^n\cdot p^2+C_{2n-1}^{n}p^n(1-p)^{n-1}\cdot\left[1-(1-p)^2\right]+\left[P_n-C_{2n-1}^{n}p^n(1-p)^{n-1}\right]$$

$$=P_n+C_{2n-1}^{n-1}p^{n-1}(1-p)^n\cdot p^2-C_{2n-1}^{n}p^n(1-p)^{n-1}\cdot(1-p)^2$$

$$=P_n+C_{2n-1}^{n}p^{n+1}(1-p)^n-C_{2n-1}^{n}p^n(1-p)^{n+1}=P_n+C_{2n-1}^{n}p^n(1-p)^n(2p-1),$$

所以 $P_{n+1}-P_n=C_{2n-1}^{n}p^n(1-p)^n(2p-1)$，

当 $\frac{1}{2}<p<1$ 时，$P_{n+1}-P_n>0$，

又 $$\frac{P_{n+2}-P_{n+1}}{P_{n+1}-P_n}=\frac{C_{2n+1}^{n+1}p^{n+1}(1-p)^{n+1}(2p-1)}{C_{2n-1}^{n}p^n(1-p)^n(2p-1)}=\frac{C_{2n+1}^{n+1}p(1-p)}{C_{2n-1}^{n}}=\frac{\frac{(2n+1)!}{(n+1)!n!}p(1-p)}{\frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!}}$$

$$=\frac{4n+2}{n+1}p(1-p)<4p(1-p)\leqslant 4\left[\frac{p+(1-p)}{2}\right]^2=1,$$

因为 $P_{n+1}-P_n>0$，所以 $P_{n+2}-P_{n+1}<P_{n+1}-P_n$，即 $P_n+P_{n+2}<2P_{n+1}$.