

2024~2025 学年度下期高中 2023 级期末考试 数学参考答案及评分标准

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1	2	3	4	5	6	7	8
A	C	C	B	A	C	D	B

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求；全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9	10	11
BCD	ABC	ACD

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 1

13. $2^n - 1 (n \in \mathbb{N}^*)$

14. $a_n = (n-1)(a_{n-2} + a_{n-1}) (n \geq 3)$ (2 分，若未写出 n 的取值范围同样给分) 44 (3 分)

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分)

解：(1) 由已知可得 $\begin{cases} 2a + 2c = 6, \\ \frac{c}{a} = \frac{1}{2}, \end{cases}$ 4 分

$$\therefore a = 2, c = 1,$$

$$\therefore b^2 = 3,$$

$$\therefore C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1; \quad \text{.....5 分}$$

(2) $\because F_2(1,0)$ ，当直线 l 为 x 轴时，与题意不符，

$\therefore$ 可设 $l: x = my + 1$ ， $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，

$$\text{由 } \begin{cases} x = my + 1, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases}$$

$$\text{得 } (3m^2 + 4)y^2 + 6my - 9 = 0, \quad \text{.....7 分}$$

$$\therefore \Delta > 0,$$

$$\therefore y_1 + y_2 = -\frac{6m}{3m^2 + 4}, \quad y_1 y_2 = -\frac{9}{3m^2 + 4}, \quad \text{.....9 分}$$

$$\text{又 } \because \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

$$= (my_1 + 1)(my_2 + 1) + y_1 y_2$$

$$= (m^2 + 1)y_1 y_2 + m(y_1 + y_2) + 1$$

$$= -\frac{9(m^2 + 1)}{3m^2 + 4} - \frac{6m^2}{3m^2 + 4} + 1$$

$$= -2, \quad \text{.....11 分}$$

$$\therefore m = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{.....12 分}$$

$$\therefore \text{直线 } l \text{ 的方程为 } 2x \pm \sqrt{2}y - 2 = 0. \quad \text{.....13 分}$$

(其他解法参照给分)

(3) 如图, 以 A 为原点, AB , AD , AP 所在直线分别为 x , y , z 轴, 建立空间直角坐标系 $Axyz$,

则 $P(0,0,2)$, $B(\sqrt{2},0,0)$, $C(\sqrt{2},1,0)$, $D(0,3,0)$,

$\therefore \overrightarrow{PB} = (\sqrt{2}, 0, -2)$, $\overrightarrow{PC} = (\sqrt{2}, 1, -2)$, $\overrightarrow{PD} = (0, 3, -2)$,

设平面 PBC 的法向量为 $\mathbf{m} = (x_0, y_0, z_0)$,

$$\text{由} \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{PB} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{PC} = 0, \end{cases}$$

$$\text{得} \begin{cases} \sqrt{2}x_0 - 2z_0 = 0, \\ \sqrt{2}x_0 + y_0 - 2z_0 = 0, \end{cases}$$

令 $z_0 = 1$,

则 $\mathbf{m} = (\sqrt{2}, 0, 1)$,

同理可得平面 PDC 的法向量为 $\mathbf{n} = (2\sqrt{2}, 2, 3)$,

$$\therefore \cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} + 0 \times 2 + 1 \times 3}{\sqrt{3} \times \sqrt{21}} = \frac{\sqrt{7}}{3}, \quad \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$$

设平面 BCP 与平面 CDP 所成夹角为 θ ,

$$\therefore \cos \theta = |\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{\sqrt{7}}{3},$$

$$\therefore \text{平面 } BCP \text{ 与平面 } CDP \text{ 所成夹角的余弦值为 } \frac{\sqrt{7}}{3}. \quad \dots\dots\dots 15 \text{ 分}$$

(其他解法参照给分)

18. (17 分)

解: (1) 设每组不通过检测的概率为 P_1 ,

根据题意有,

$$P_1 = 1 - 0.991^5 = 1 - (1 - 0.009)^5 \approx 1 - (1 - 0.009 \times 5) = 0.045,$$

$\therefore$ 当 $k = 5$ 时, 每组不通过检测的概率为 0.045;

(2) 由题意知 $E(X) = 10$,

Y 的所有可能取值为 $\frac{k+9}{k}$, $\frac{k+9}{k} + 10$,

$$\text{又} \because P(Y = \frac{k+9}{k}) = 0.991^k, \quad P(Y = \frac{k+9}{k} + 10) = 1 - 0.991^k, \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\therefore E(Y) = \frac{k+9}{k} \times 0.991^k + (\frac{k+9}{k} + 10) \times (1 - 0.991^k) = 11 + \frac{9}{k} - 10 \times 0.991^k, \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\therefore E(X) = E(Y),$$

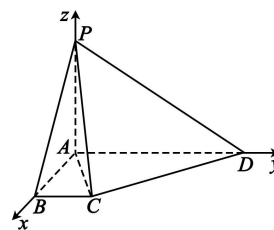
$$\therefore 1 + \frac{9}{k} = 10 \times 0.991^k = 10 \times (1 - 0.009)^k \approx 10 - 0.09k, \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

化简可得 $k^2 - 100k + 100 = 0$,

$$\text{解得 } k = \frac{100 \pm 10\sqrt{96}}{2},$$

即 $k = 1$ 或 $k = 99$,

$\therefore k$ 的值为 1 或 99;



(3) 由 (2) 可知,

$$\begin{aligned}
 E(Y) &= \frac{k+9}{k} \times 0.991^k + \left(\frac{k+9}{k} + 10\right) \times (1 - 0.991^k) \\
 &= 11 + \frac{9}{k} - 10 \times 0.991^k \\
 &= 11 + \frac{9}{k} - 10 \times (1 - 0.009)^k \\
 &\approx 11 + \frac{9}{k} - 10 \times (1 - 0.009k) \\
 &= 1 + \frac{9}{k} + 0.09k \\
 &\geq 1 + 2\sqrt{\frac{9}{k} \times 0.09k} \\
 &= 2.8, \quad \dots\dots\dots 14 \text{ 分}
 \end{aligned}$$

当且仅当 $\frac{9}{k} = 0.09k$ 即 $k=10$ 时取 “=”, $\dots\dots\dots 15 \text{ 分}$

设检测一块晶圆需要的时间为 Z ,

则 $Z = 500Y$,

$$E(Z) = 500E(Y) = 500 \times 2.8 = 1400,$$

$\therefore$ 当 $k=10$ 时, 方案二检测一块晶圆用时最少, 最少的时间成本是 1400 秒. $\dots\dots\dots 17 \text{ 分}$
(其他解法参照给分)

19. (17 分)

解: (1) 当 $a=1$ 时, $f(x) = xe^x - x - \ln x$,

$$\therefore f'(x) = (x+1)e^x - \frac{x+1}{x} = \frac{x+1}{x}(xe^x - 1), \quad \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

令 $t(x) = xe^x$, $x > 0$,

$$\therefore t'(x) = (x+1)e^x > 0,$$

$\therefore t(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

$$\text{又} \because t\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{e} < 1, \quad t(1) = e > 1,$$

$$\therefore \exists x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right), \text{ 使得 } t(x_0) = x_0 e^{x_0} = 1,$$

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

$$\therefore f(x) \geq f(x_0) = x_0 e^{x_0} - x_0 - \ln x_0 = 1 - \ln(x_0 e^{x_0}) = 1 - \ln 1 = 1,$$

$\therefore f(x)$ 的最小值为 1; $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

$$(2) \because f'(x) = (x+1)e^x - \frac{a(x+1)}{x} = \frac{x+1}{x}(xe^x - a),$$

由 (1) 可知, 当 $x \geq 1$ 时, $t(x) = xe^x \geq e$,

$\therefore$ 当 $a \leq e$ 时, $f'(x) \geq 0$, $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增,

$\therefore f(x) \geq f(1) = e - a \geq 0$, 成立, $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

当 $a > e$ 时, $\exists x_3 \in (1, +\infty)$, 使得 $x_3 e^{x_3} - a = 0$,

当 $x \in [1, x_3)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

当 $x \in (x_3, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

$$\therefore f(x_3) < f(1) = e - a < 0, \text{ 不成立,}$$

$\therefore a$ 的取值范围为 $(-\infty, e]$; $\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

$$(3) \because f(x) = xe^x - a(x + \ln x) = xe^x - a \ln(xe^x),$$

$$\therefore g(t) = t - a \ln t,$$

已知 $f(x)$ 的两个零点为 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$,

$\therefore$ 存在对应的 $t_1 = x_1 e^{x_1}, t_2 = x_2 e^{x_2} (t_1 < t_2)$ 为函数 $g(t)$ 的两个零点,11 分

$$\text{又} \because g'(t) = 1 - \frac{a}{t} = \frac{t-a}{t},$$

$\therefore t = a$ 为函数 $g(t)$ 的唯一极小值点,

$$\therefore 0 < t_1 < a < t_2,$$

要证 $x_1 e^{x_1} + x_2 e^{x_2} > 2a$,

即证 $t_1 + t_2 > 2a$,

即证 $t_2 > 2a - t_1 > a$,

即证 $g(t_1) = g(t_2) > g(2a - t_1)$,13 分

令 $h(t) = g(t) - g(2a - t)$,

$$\therefore h'(t) = g'(t) + g'(2a - t) = 1 - \frac{a}{t} + 1 - \frac{a}{2a - t} = \frac{-2(t-a)^2}{t(2a-t)} < 0, \quad \text{.....15 分}$$

$\therefore h(t)$ 在 $(0, a)$ 上单调递减,

$$\therefore h(t) > h(a) = 0,$$

$$\therefore g(t_1) > g(2a - t_1),$$

$$\therefore x_1 e^{x_1} + x_2 e^{x_2} > 2a. \quad \text{.....17 分}$$

(其他解法参照给分)

解析:

1. 解: 原式 $= 8 \times 7 \times A_6^6 - 55A_6^6 - A_6^6 = 0$, 故选 A.

2. 解: $E(3X+2) = 3E(X)+2 = 3 \times 3 + 2 = 11$, 故选 C.

3. 解: 记事件 $A =$ “第 1 次抽到代数题”, $B =$ “第 2 次抽到几何题”, 由已知可得 $n(\Omega) = A_5^2 = 20$,

$$n(A) = 3 \times 4 = 12, \quad n(AB) = 3 \times 2 = 6, \quad \therefore P(A) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}, \quad P(AB) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10},$$

$$\therefore P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{2}, \quad \text{故选 C.}$$

4. 解: $\because S_8 = S_{10}$, 故对称轴为 $n = \frac{8+10}{2} = 9$, 故选 B.

5. 解: 先排乙有 A_3^1 种, 再排甲有 A_3^1 种, 剩下 3 名同学有 A_3^3 种, $\therefore A_3^1 \times A_3^1 \times A_3^3 = 54$ 种, 故选 A.

6. 解: $\because f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$, 令 $f'(x) = 0$ 得 $x = e$, $\therefore f(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减, $\because e < a < b$, $\therefore f(a) > f(b)$, 故选 C.

7. 解: $C_6^3 x^3 \times 2^3 + C_6^4 x^4 \times C_2^1 \frac{1}{x} \times 2 = (20 \times 8 + 15 \times 2 \times 2)x^3 = 220x^3$, 故选 D.

8. 解: 由已知可得, 方程 $e^x = a(x+1) (a > 0)$ 有唯一实根, $\therefore y = e^x$ 的图象与 $y = a(x+1) (a > 0)$ 的图象有唯一交点, $\therefore y = a(x+1) (a > 0)$ 与 $y = e^x$ 相切, 易知 $a = 1$, 故选 B.

9. 解: 选项 A: $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$, $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$, 而 $P(A)$, $P(B)$ 不一定相等, $\therefore P(B|A) = P(A|B)$ 不一定成立, 故 A 错误;

选项 B: $\because P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = P(B)$, $\therefore P(AB) = P(A)P(B)$, $\therefore$ 事件 A, B 相互独立, 故 B 正确;

选项 C: $\because X \sim N(2, \sigma^2)$, 且 $P(0 \leq X \leq 4) = 0.4$, 根据对称可知 $P(X > 4) = \frac{1 - P(0 \leq X \leq 4)}{2} = 0.3$, 故 C 正确;

选项 D: $\because$ 两点分布的 $E(Y) = p = \frac{1}{2}$, $\therefore D(Y) = p(1-p) = \frac{1}{2} \cdot (1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$, $\therefore D(2Y) = 4D(Y) = 4 \times \frac{1}{4} = 1$, 故 D 正确;

故选 BCD.

10. 解: 选项 A: 令 $x = 0$, 得 $a_0 = 1$, 故 A 正确;

选项 B: 令 $x = 1$, 得 $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_8 = 1$, 令 $x = -1$, 得 $a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + a_8 = 3^8$,

$$\therefore 2(a_0 + a_2 + \cdots + a_8) = 3^8 + 1, \quad \therefore a_0 + a_2 + \cdots + a_8 = \frac{3^8 + 1}{2}, \quad \text{故 B 正确;}$$

选项 C: $\because n = 8$, $\therefore$ 二项式系数最大的项为第 $\frac{8}{2} + 1$ 项即第 5 项, 故 C 正确;

选项 D: $\because T_{k+1} = C_8^k (-2x)^k = C_8^k (-2)^k x^k$, $\therefore a_k = C_8^k (-2)^k$, 当 k 为奇数时, 系数为负数, 故 k 不能为奇数; 当 k 为偶数时, $a_2 = C_8^2 2^2 = 112$, $a_4 = C_8^4 2^4 = 1120$, $a_6 = C_8^6 2^6 = 1792$, $a_8 = C_8^8 2^8 = 256$, $\therefore$ 系数最大的项为第 7 项, 故 D 错误;

故选 ABC.

11. 解: 选项 A: 当 $a \leq 2$ 时, $f(x) = \ln(x+a) \leq \ln(x+2) \leq x+2-1 = x+1$, 当且仅当 $x = -1$ 时取等号, 又 $\because x+1 \leq e^x = g(x)$, 当且仅当 $x = 0$ 时取等号, $\therefore f(x) < g(x)$, 故 A 正确;

选项 B: $\because y = f(x) - g(x)$ 存在两个零点 x_1, x_2 且 $x_1 < 0 < x_2$, $\therefore y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 的图象有两个交点, 结合图象可知, $f(0) > g(0)$, 即 $\ln a > 1$, $\therefore a > e$, 故 B 错误;

选项 C: $\because \ln(x+a)(e^x - a) \geq 0$ 恒成立, 又 $\because y = \ln(x+a)$ 与 $y = e^x - a$ 在定义域内单调递增, $\therefore y = \ln(x+a)$ 与 $y = e^x - a$ 存在公共零点, $\therefore a > 0$ 且 $-a+1 = \ln a$, $\therefore a = 1$, 故 C 正确;

选项 D: 设曲线 $g(x) = e^x$ 的切点为 (x_1, e^{x_1}) , $\because g'(x) = e^x$, 则切线斜率为 $k_1 = e^{x_1}$, $\therefore$ 切线方程为 $y - e^{x_1} = e^{x_1}(x - x_1)$, 即 $y = e^{x_1}x - e^{x_1}x_1 + e^{x_1}$. 设曲线 $f(x) = \ln x$ 的切点为 $(x_2, \ln x_2)$,

$\because f'(x) = \frac{1}{x}$, $\therefore$ 切线斜率为 $k_2 = \frac{1}{x_2}$, 切线方程为 $y - \ln x_2 = \frac{1}{x_2}(x - x_2)$, 即

$$y = \frac{1}{x_2}x - 1 + \ln x_2. \text{ 由题意得 } \begin{cases} e^{x_1} = \frac{1}{x_2}, \\ e^{x_1} - e^{x_1}x_1 = -1 + \ln x_2 \end{cases}, \text{ 解得 } x_2 = \frac{1}{e^{x_1}}, \text{ 则 } e^{x_1} - e^{x_1}x_1 = -1 + \ln x_2$$

$$= -1 + \ln \frac{1}{e^{x_1}} = -1 - x_1, \text{ 即 } (x_1 - 1)e^{x_1} = x_1 + 1, \text{ 设 } s(x) = (x-1)e^x - x - 1, \text{ 则 } s'(x) = xe^x - 1,$$

设 $t(x) = s'(x) = xe^x - 1$, 则 $t'(x) = (x+1)e^x$, 则由 $t'(x) > 0$ 得 $x > -1$, $t'(x) < 0$ 得 $x < -1$,

则 $t(x) = s'(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递减, 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增, $\because t(-1) = -e^{-1} - 1 < 0$,

$t(1) = e - 1 > 0$, 则由零点存在性定理可知, $\exists x_0 \in (-1, 1)$ 使得 $t(x_0) = 0$, 即 $x_0 e^{x_0} = 1$, 又 $\because$

当 $x < 0$ 时, $xe^x < 0$, 则 $t(x) < 0$, 则由 $t(x) = s'(x) < 0$ 得 $x < x_0$; $t(x) = s'(x) > 0$ 得 $x > x_0$,

则 $s(x)$ 在 $(-\infty, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增, 则 $s(x)_{\min} = s(x_0)$

$$= (x_0 - 1)e^{x_0} - x_0 - 1 = 1 - e^{x_0} - x_0 - 1 = -e^{x_0} - x_0 = -e^{x_0} - \frac{1}{e^{x_0}} < 0, \because s(-2) = -3e^{-2} + 1 > 0,$$

$s(2) = e^2 - 3 > 0$, 则由零点存在性定理可知, $s(x)$ 在 $(-\infty, x_0)$ 和 $(x_0, +\infty)$ 上分别存在一个

零点, 则方程 $(x_1 - 1)e^{x_1} = x_1 + 1$ 存在两个根, $\therefore f(x)$ 和 $g(x)$ 存在两条公切线, 故 D 正确;

故选 ACD.

12. 解: $\because f'(x) = \cos x + \sin x$, $\therefore f'(\frac{\pi}{2}) = 0 + 1 = 1$, 故答案为 1.

13. 解: 当 $n = 1$ 时, $S_1 = 2a_1 - 1$, $\therefore S_1 = 1$, 当 $n \geq 2$ 时, $S_n = 2(S_n - S_{n-1}) - 1$, $\therefore S_n = 2S_{n-1} + 1$,

$\therefore S_n + 1 = 2(S_{n-1} + 1)$, $\therefore \{S_n + 1\}$ 是以 2 为首项, 2 为公比的等比数列, $\therefore S_n + 1 = 2^n$, 故答案为

$$S_n = 2^n - 1 (n \in \mathbf{N}^*).$$

14. 解: 第一空: 由已知可得 $a_n = (n-1)(a_{n-2} + a_{n-1}) (n \geq 3)$; 第二空: 由递推关系可得

$$a_4 = (4-1)(a_2 + a_3) = 3 \times (1+2) = 9, \therefore a_5 = (5-1)(a_3 + a_4) = 4 \times (2+9) = 44, \text{ 故答案为 } 44.$$