

2024~2025 学年度下期高中 2023 级期末考试

数 学

考试时间 120 分钟，满分 150 分

注意事项：

1. 答题前，考生务必在答题卡上将自己的姓名、座位号、准考证号用 0.5 毫米的黑色签字笔填写清楚，考生考试条形码由监考老师粘贴在答题卡上的“贴条形码区”。
2. 选择题使用 2B 铅笔填涂在答题卡上对应题目标号的位置上，如需改动，用橡皮擦擦干净后再填涂其它答案；非选择题用 0.5 毫米的黑色签字笔在答题卡的对应区域内作答，超出答题区域答题的答案无效；在草稿纸上、试卷上答题无效。
3. 考试结束后由监考老师将答题卡收回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. $A_8^8 - 55A_6^6 - 6A_5^5 =$
A. 0 B. 56 C. 1 D. 42
2. 若随机变量 X 的期望 $E(X) = 3$ ，则 $E(3X + 2) =$
A. 3 B. 9 C. 11 D. 27
3. 在 5 道试题中有 3 道代数题和 2 道几何题，每次从中随机抽出 1 道题，抽出的题不再放回，则在第 1 次抽到代数题的条件下，第 2 次抽到几何题的概率为
A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{3}{10}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{3}{5}$
4. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $a_1 > 0$ ， $d < 0$ ， $S_8 = S_{10}$ ，则 S_n 取最大值时 n 的值为
A. 8 B. 9 C. 10 D. 18
5. 5 名同学排成一排，甲不站排头，乙不站两端，则不同的排列种数为
A. 54 种 B. 48 种 C. 36 种 D. 42 种
6. 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ， $e < a < b$ ，则
A. $f(a) = f(b)$
B. $f(a) < f(b)$
C. $f(a) > f(b)$
D. $f(a)$ ， $f(b)$ 的大小关系不能确定

7. $(x + \frac{1}{x} + 2)^6$ 的展开式中 x^3 的系数为

- A. 60 B. 120 C. 160 D. 220

8. 已知函数 $f(x) = e^x - ax - a (a > 0)$ ，若存在唯一的 x_0 使得 $f(x_0) = 0$ ，则 a 的值为

- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{e}{2}$ D. e

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 下列说法正确的是

- A. 假设 A, B 是两个事件， $P(A) > 0$ ， $P(B) > 0$ ，则 $P(B|A) = P(A|B)$
B. 假设 A, B 是两个事件， $P(A) > 0$ ，若 $P(B|A) = P(B)$ ，则事件 A, B 相互独立
C. 随机变量 $X \sim N(2, \sigma^2)$ ，且 $P(0 \leq X \leq 4) = 0.4$ ，则 $P(X > 4) = 0.3$
D. 随机变量 Y 服从两点分布，且 $E(Y) = \frac{1}{2}$ ，则 $D(2Y) = 1$

10. 已知 $(1 - 2x)^8 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_8x^8$ ，则

- A. $a_0 = 1$
B. $a_0 + a_2 + a_4 + a_6 + a_8 = \frac{3^8 + 1}{2}$
C. 展开式中二项式系数最大的项是第 5 项
D. 展开式中系数最大的项是第 5 项

11. 我国著名数学家华罗庚先生曾说：“数缺形时少直观，形缺数时难入微，数形结合百般好，隔裂分家万事休。”在数学的学习和研究中，常用函数的图象来研究函数的性质，解决相关的问题，已知函数 $f(x) = \ln(x + a) (a \in \mathbf{R})$ ， $g(x) = e^x$ ，则下列说法正确的是

- A. 当 $a \leq 2$ 时， $f(x) < g(x)$
B. 若函数 $y = f(x) - g(x)$ 存在两个零点 x_1, x_2 ，且 $x_1 < 0 < x_2$ ，则 $a > 2$
C. 若 $f(x)[g(x) - a] \geq 0$ 恒成立，则 $a = 1$
D. 当 $a = 0$ 时， $f(x)$ 与 $g(x)$ 存在两条公切线

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 已知函数 $f(x) = \sin x - \cos x$ ，则 $f'(\frac{\pi}{2}) = \underline{\hspace{2cm}}$.

13. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $S_n = 2a_n - 1$ ，则 $S_n = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 历史上有一个著名的“伯努利装错信笺问题”，它讲的是某人想邀请朋友来家中聚会，写好了 n 封请柬，需要装入 n 个写好友人名字的信封，结果因为粗心把请柬全部装错了信封，求装错的可能会有多少种的问题．瑞士著名数学家欧拉(Leonhard Euler, 1707~1783)按一般情况给出解答：用 $A, B, C, \dots$ 表示写着 n 位友人名字的信封， $a, b, c, \dots$ 表示 n 份对应的写好的请柬，把装错的情况总数记作 a_n ，假设把 a 错装进 B 里了，包含着这个错误的一切错装法分两类：第一类： b 装入 A 里，这时每种错装的其余部分都与 A, B, a, b 无关，应有 a_{n-2} 种错装法；第二类： b 装入 A, B 之外的一个信封，这时的装信工作实际是把（除 a 之外的） $n-1$ 份请柬 $b, c, \dots$ 装入（除 B 以外的） $n-1$ 个信封 $A, C, \dots$ ，显然这时装错的情况有 a_{n-1} 种．总之在 a 装入 B 的错误之下，共有错装法 $a_{n-2} + a_{n-1}$ 种． a 装入 C ，装入 $D \dots$ 的 $n-2$ 种错误之下，同样都有 $a_{n-2} + a_{n-1}$ 种错装法，因此可得到 a_{n-2}, a_{n-1}, a_n 的关系式为_____；通过枚举法，容易求出 $a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 2$ ，于是可以迅速用多种方法求出 $a_5 =$ _____.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ， P 为椭圆 C 上一点，

$\triangle PF_1F_2$ 的周长为 6，离心率 $e = \frac{1}{2}$ ．

(1) 求椭圆 C 的标准方程；

(2) 过点 F_2 的直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点，若 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -2$ ，求直线 l 的方程．

16. (15 分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足： $a_1 = 3, a_4 + a_8 = 26$ ，等比数列 $\{b_n\}$ 满足： $b_1 = 1, b_2 + b_4 = 10$ ．

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和数列 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 在区间 $(2^4, 2^5)$ 内，求数列 $\{a_n\}$ 有多少项；

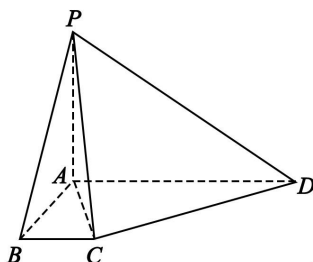
(3) 将数列 $\{a_n\}$ 和数列 $\{b_n\}$ 中的所有项按照从小到大的顺序组成一个新的数列 $\{c_n\}$ ，

设数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，求 S_{20} ．

17. (15 分)

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为直角梯形， $BC \parallel AD$ ， $\angle BAD = 90^\circ$ ， $AD = 3$ ， $AP = 2$ ， $BC = 1$ ， $PA \perp$ 底面 $ABCD$ ，平面 $PAC \perp$ 平面 PCD 。

- (1) 证明： $CD \perp$ 平面 PAC ；
- (2) 求 AB 的长；
- (3) 求平面 BCP 与平面 CDP 所成夹角的余弦值。



18. (17 分)

随着 AI 产业的兴起，国内的一些大型的 AI 模型需要大量图形计算芯片，加工一块晶圆需要若干 die（裸片/管芯），由于工艺水平限制，加工出来的 die 并不是全都合格，需要对晶圆上的 die 进行检测，检测合格后方能切割和封装。已知某晶圆加工厂加工的一块晶圆上共有 500 个 die，每个 die 的合格率为 99.1%，现有两种检测方案，方案一：对每个 die 逐一检测，检测一次需要 10 秒钟，一块晶圆就需要检测 500 次；方案二：将 k 个 die 串联成一组一起检测，检测一次需要 $k+9$ 秒钟，若通过则该 k 个 die 全为合格品，若不通过则需要对该 k 个 die 逐一检测，每个 die 检测是否合格相互独立。

(1) 当 $k=5$ 时，即 5 个 die 一组串联检测，求每组不通过检测的概率；（精确到小数点后三位）

(2) 设方案一和方案二中每个 die 的平均检测时间分别为 X 和 Y ，当 X 和 Y 的期望 $E(X)$ ， $E(Y)$ 满足 $E(X) = E(Y)$ 时，估算 k 的值；

(3) 估算当 k 为多少时，方案二检测一块晶圆用时最少，最少的时间成本是多少。

参考公式与数据：当 $-0.02 < x < 0$ 时， $(1+x)^n \approx 1+nx$ ； $\sqrt{96} \approx 9.80$ 。

19. (17 分)

已知函数 $f(x) = xe^x - a(x + \ln x)$ ($x > 0$ ， $a \in \mathbf{R}$)。

(1) 当 $a=1$ 时，求 $f(x)$ 的最小值；

(2) 若 $f(x) \geq 0$ 对任意 $x \geq 1$ 恒成立，求 a 的取值范围；

(3) 当 $a > e$ 时，设 $f(x)$ 的两个零点为 x_1 ， x_2 ($x_1 < x_2$)，证明： $x_1 e^{x_1} + x_2 e^{x_2} > 2a$ 。