成都七中高一数学测试

一、单选题（每题 5 分，共 8 题）

1、在△ABC 中，$BC=2$，$AC=\sqrt{6}$，$B=60^\circ$，则 $A=$（ ）.

A. 45° B. 45° 或 135° C. 30° D. 30° 或 150°

2、设 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 是非零向量，其夹角为 θ，“θ 为锐角”是“$\vec{a}\cdot\vec{b}>0$”成立的( )条件.

A.既不充分也不必要 B.充分不必要 C.必要不充分 D. 充要

3、设 $z=\dfrac{(1+i)i^{2025}}{(2-i)^2}$，则 z 在复平面内对应的点位于( ).

A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

4、将函数 $y=\cos(2x-\dfrac{5\pi}{12})$ 的图象上所有点向左平移 $\dfrac{5\pi}{12}$ 个单位长度，再将横坐标缩短到原来的 $\dfrac{1}{2}$，纵坐标不变，所得新图象对应的函数解析式为( ).

A. $y=\cos(4x+\dfrac{5\pi}{12})$ B. $y=\cos 4x$ C. $y=\cos(x+\dfrac{5\pi}{12})$ D. $y=\cos x$

5、已知 α 为第三象限角，且 $\sin(\alpha-\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{1}{3}$，则 $\cos\alpha=$( ).

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ B. $-\dfrac{\sqrt{2}}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ C. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}-\dfrac{1}{6}$ D. $-\dfrac{\sqrt{6}}{3}-\dfrac{1}{6}$

6、在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，过点 C 作直线 l，使其与直线 AB_1 和 BD 所成角均为 60°，则直线 l 的可作条数为( ).

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

7、设函数 $f(x)=\sin(\omega x)\cdot\cos(\omega x)(\omega>0)$，若存在 x_1、$x_2\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$，使得 $f(x_1)=f(x_2)+1$，则 ω 的取值范围为( ).

A. $(1,+\infty)$ B. $(1,\dfrac{5}{4})\cup(\dfrac{3}{2},+\infty)$ C. $(\dfrac{5}{4},+\infty)$ D. $(\dfrac{5}{4},\dfrac{3}{2})\cup(\dfrac{7}{4},+\infty)$

8、△ABC 的垂心为 H，设函数 $f(x)=|x^2\overrightarrow{HA}+x\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}|$，则 $f(x)$ 的零点个数至多为 ( ).

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

二、多选题（每题 6 分，共 3 题）

9、已知 m、n 为两条直线，α、β 为两个平面，下列说法错误的为( ).

A. 若 $m//\alpha$，$n//\alpha$，则 $m//n$ B. 若 $m//\alpha$，$m//\beta$，则 $\alpha//\beta$

C. 若 $m\perp\alpha$，$n\perp\beta$，$m//n$，则 $\alpha//\beta$ D. 若 $m//\alpha$，$n//\beta$，$m\perp n$，则 $\alpha\perp\beta$

10、已知 z_1、z_2 为复数，下列说法正确的为( ).

A. $(z_1+z_2)^2=|z_1+z_2|^2$ B. 若 $2z_1<\overline{z_1}$，则 $|z_1|>z_1$

C. $z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2$ 的虚部为 0 D. 若 $z_2^2(1-i)=4\sqrt{2}$，则 $|z_2|=2$

11、在三棱锥 $A-BCD$ 中，$\angle ABD=\angle DBC=45^{\circ}$，$\angle ABC=60^{\circ}$，$AB=\sqrt{2}$，且 $AD\perp BC$，则该棱锥外接球表面积可能为(　　).

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. π　　C. 2π　　D. 4π

三、填空题（每题 5 分，共 3 题）

12、向量 $\vec{a}=(-3,1)$，$\vec{b}=(1,1)$，则 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影向量坐标为________.

13、某四棱锥侧棱与底面边长均为 1，则该棱锥的内切球半径为________.

14、向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=2|\vec{b}|$，$|\vec{a}-\vec{b}|=2$，则 $|\vec{a}+\vec{b}|$ 的取值范围为________.

四、解答题

15、(13 分) 已知向量 $\vec{a}=(\cos x,\sin x)$，$\vec{b}=(3,-\sqrt{3})$，$x\in[0,\pi]$.

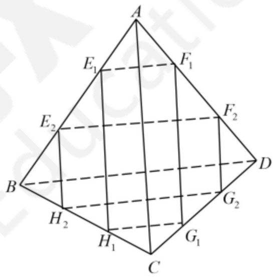
(1)若 $\vec{a}//\vec{b}$，求 x 的值；

(2)设 $f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\lambda$，若 $f(x)$ 存在零点，求 λ 的取值范围.

16、(15 分) 如图，在棱长为 3 的正四面体 $A-BCD$ 中，E_1、E_2、F_1、F_2、G_1、G_2、H_1、H_2 分别为所在棱的三等分点.

(1)求多面体 $E_1F_1G_1H_1-E_2F_2G_2H_2$ 的表面积 S；

(2)求多面体 $AC-E_1F_1G_1H_1$ 的体积 V.



17、(15分)设△ ABC 的内角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c，且△ ABC 的面积 $S=\frac{a^2-b^2}{4}$.

(1)证明：$\sin(A-B)=2\sin A\sin B$；

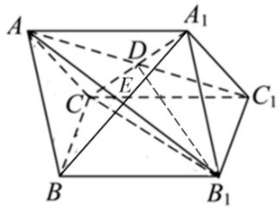
(2)若 $A=3B$，求 B 的值.

18、(17 分) 如图，在五面体 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$A_1C\cap AC_1=D$，$A_1B\cap AB_1=E$，四边形 BB_1C_1C 为菱形，且 $AA_1=CC_1=2$.

(1)证明：$AC//A_1C_1$；

(2)若 $AB=AC=B_1C=2$，证明：平面 $A_1BC\perp$ 平面 AB_1C_1；

(3)在(2)问的条件下，若 DB_1 与平面 A_1BC 所成角的正切值为 $\sqrt{2}$，求二面角 $A-BC-B_1$ 的正切值.



19、(17 分) 定义 $G_n(\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\cdots,\overrightarrow{a_n})=(\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n},\sqrt[n]{y_1y_2\cdots y_n})$，其中 $\overrightarrow{a_i}=(x_i,y_i)$，$x_i,y_i>0$，$i=1,2,\cdots,n$.

(1)设 $\vec{b}=G_2(\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2})$，证：$|\overrightarrow{a_1}||\overrightarrow{a_2}|\ge|\vec{b}|^2$，并求 $\left(\frac{1}{\sin^2\theta}+\frac{4}{\cos^2\theta}\right)_{\min}$，$\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$；

(2)设 $\vec{c}=G_2(\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{a_3})$，证：$|\overrightarrow{a_1}||\overrightarrow{a_2}||\overrightarrow{a_3}||\vec{c}|\ge|\vec{c}|^4$，并求 $\left(\frac{1}{\sin\theta}+\frac{8}{\cos\theta}\right)_{\min}$，$\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$；

(3)设 $\vec{b}=G_2(\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2})$，且 $\vec{b}=\lambda\overrightarrow{a_1}+\mu\overrightarrow{a_2}$，若 $(x_1-x_2)(y_1-y_2)<0$，判断 $\lambda+\mu$ 与 1 的大小关系，并证明.

成都七中高一数学测试参考答案

一、1、A　　2、B　　3、D　　4、A　　5、B　　6、B　　7、D　　8、A
二、9、ABD　　10、BCD　　11、CD
三、12、$(-1,-1)$　　13、$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$　　14、$\left[\dfrac{2}{3},6\right]$
四、解答题

15、解：(1) 因为 $\vec{a}=(\cos x,\sin x)$，$\vec{b}=(3,-\sqrt{3})$，$\vec{a}//\vec{b}$，所以 $-\sqrt{3}\cos x-3\sin x=0$．
若 $\cos x=0$，则 $\sin x=0$，与 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ 矛盾，
故 $\cos x\neq 0$，于是 $\tan x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．又 $x\in[0,\pi]$，所以 $x=\dfrac{5\pi}{6}$．　(5 分)

(2) $f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}=(\cos x,\sin x)\cdot(3,-\sqrt{3})+\lambda=3\cos x-\sqrt{3}\sin x+1=2\sqrt{3}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\lambda$．

因为 $x\in[0,\pi]$，所以 $x+\dfrac{\pi}{6}\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{7\pi}{6}\right]$，从而 $-1\le\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)\le\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

即 $-2\sqrt{3}+\lambda\le f(x)\le 3+\lambda$，本试卷答案最早发在微信公众号“做事方法很重要”(10 分)

由题设知 $-2\sqrt{3}+\lambda\le 0\le 3+\lambda$，解得 $-3\le\lambda\le 2\sqrt{3}$．　(13 分)

16、解：(1)由题设知，四边形 $E_1E_2H_2H_1$ 为等腰梯形，四边形 $E_1F_1G_1H_1$ 为矩形，其中

$E_1H_1=2$，$E_1F_1=E_1E_2=E_2H_2=H_2H_1=1$，$S_{梯形E_1E_2H_2H_1}=3\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot 1^2=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$，

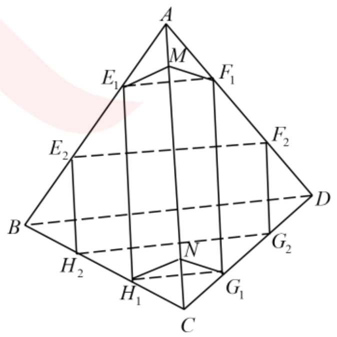
$S_{矩形E_1F_1G_1H_1}=1\cdot 2=2$，而 $S=4S_{梯形E_1E_2H_2H_1}+2S_{矩形E_1F_1G_1H_1}=4+3\sqrt{3}$．　(6 分)

(2)在棱 AC 上取 M、N 两点，使得 $AM=CN=\dfrac{1}{2}$，由题设可知 $E_1M\perp AC$，

$F_1M\perp AC$，即 $AC\perp$ 平面E_1MF_1，且 $E_1M=F_1M=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$S_{三角形ME_1F_1}=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，

同理 $AC\perp$ 平面H_1NG_1，多面体 $E_1MF_1-H_1NG_1$ 为直三棱柱，　(9 分)

此时 $V=2V_{A-E_1MF_1}+V_{E_1MF_1-H_1NG_1}=2\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{4}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{4}\cdot 2=\dfrac{7\sqrt{2}}{12}$．　(15 分)



17、解：(1)由余弦定理知 $a^2-b^2=c^2-2bc\cos A$ ①，由三角形面积公式，知 $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$ ②，

将①和②代入 $S=\dfrac{a^2-b^2}{4}$，经整理，可得 $c-2b\cos A=2b\sin A$，
由正弦定理，可得 $\sin C-2\sin B\cos A=2\sin B\sin A$，
利用 $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\sin B\cos A$，
整理可得 $\sin A\cos B-\cos A\sin B=2\sin B\sin A$，

即 $\sin(A-B)=2\sin B\sin A$， （8 分）

(2) 将 $A=3B$ 代入(1)问结论中，可得 $\sin(2B)=2\sin B\sin 3B$，

利用 $\sin(2B)=2\sin B\cos B$，经化简，得 $\cos B=\sin 3B$，

即 $\sin(\frac{\pi}{2}-B)=\sin 3B$，

又 $A+B<\pi$，且 $A=3B$，可知 $0<B<\frac{\pi}{4}$，即 $\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}-B<\frac{\pi}{2}$，$0<3B<\frac{3\pi}{4}$，

则有 $\frac{\pi}{2}-B=3B$ 或 $\frac{\pi}{2}-B+3B=\pi$，即 $B=\frac{\pi}{8}$，或 $B=\frac{\pi}{4}$(舍去)

故 $B=\frac{\pi}{8}$． （15 分）

18、解：(1) $\because CC_1//BB_1$，$CC_1\not\subset$ 平面AA_1B_1B，$BB_1\subset$ 平面AA_1B_1B，

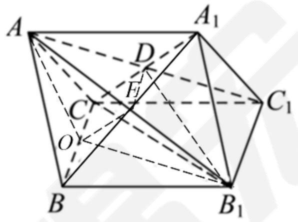
$\therefore CC_1//$平面AA_1B_1B，

又$\because CC_1\subset$ 平面AA_1C_1C，平面$AA_1C_1C\cap$平面$AA_1B_1B=AA_1$，

$\therefore AA_1//C_1C$，

又$\because AA_1=CC_1$，

$\therefore AC=A_1C_1$，且 $AC//A_1C_1$． （5 分）



(2)取 BC 中点 O，连接 OA、OB_1、OE，由题设知△ABC、△BB_1C 为等边三角形，

四边形 ABB_1A_1 为菱形，且 $OA=OB_1=\sqrt{3}$，

$\because AB_1\perp A_1B$，$AB_1\perp OE$，OE、$A_1B\subset$ 平面A_1BC，$OE\cap A_1B=E$，

$\therefore AB_1\perp$ 平面A_1BC，

又$\because AB_1\subset$ 平面AB_1C_1，

$\therefore$ 平面 $A_1BC\perp$ 平面 AB_1C_1； （11 分）

(3)连接 DE，由(2)可知 $AB_1\perp$ 平面A_1BC，DB_1 在平面 A_1BC 的射影即 DF，DB_1 与平面 A_1BC 所成角 $\angle EDB_1$，在 $Rt\triangle EDB_1$ 中，$EB_1=\sqrt{2}ED=\sqrt{2}\frac{BC}{2}=\sqrt{2}$，

又 $BC\perp AO$，$BC\perp OB_1$，则$\angle AOB_1$ 为二面角 $A-BC-B_1$ 的平面角，

在 $Rt\triangle OEB_1$ 中，$OE=\sqrt{OB_1^2-EB_1^2}=1$，故 $\tan\angle EOB_1=\sqrt{2}$，

而 $\tan\angle AOB_1=\tan(2\angle EOB_1)=\frac{2\tan\angle EOB_1}{1-\tan^2\angle EOB}=-2\sqrt{2}$．

故二面角 $A-BC-B_1$ 的正切值为 $-2\sqrt{2}$． （17 分）

19、解：(1) $\vec{b}=(\sqrt{x_1x_2},\sqrt{y_1y_2})$，$|\vec{b}|=\sqrt{x_1x_2+y_1y_2}$，$\because |\vec{a_1}||\vec{a_2}|\ge|\vec{a_1}\cdot\vec{a_2}|=x_1x_2+y_1y_2$，

$\therefore |\vec{a_1}||\vec{a_2}|\ge|\vec{b}|^2$，即 $(x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2)\ge(x_1x_2+y_1y_2)^2$，$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}$ 取等， （3 分）

$(\sin^2\theta+\cos^2\theta)(\frac{1}{\sin^2\theta}+\frac{4}{\cos^2\theta})\ge(\sqrt{\sin\theta\cdot\frac{1}{\sin\theta}}+\sqrt{\cos\theta\cdot\frac{4}{\cos\theta}})^2=9$，$\tan\theta=\frac{1}{2}$ 取

等，故 $(\frac{1}{\sin^2\theta}+\frac{4}{\cos^2\theta})_{\min}=9$；　(5 分)

(2) $\vec{c}=(\sqrt[3]{x_1x_2x_3},\sqrt[3]{y_1y_2y_3})$，$|\vec{c}|=\sqrt{x_1^{\frac{2}{3}}x_2^{\frac{2}{3}}x_3^{\frac{2}{3}}+y_1^{\frac{2}{3}}y_2^{\frac{2}{3}}y_3^{\frac{2}{3}}}$，

由(1)知 $|\overrightarrow{a_1}||\overrightarrow{a_2}|\ge x_1x_2+y_1y_2$，$|\overrightarrow{a_3}||\vec{c}|\ge x_3\sqrt[3]{x_1x_2x_3}+y_3\sqrt[3]{y_1y_2y_3}=x_1^{\frac{1}{3}}x_2^{\frac{1}{3}}x_3^{\frac{4}{3}}+y_1^{\frac{1}{3}}y_2^{\frac{1}{3}}y_3^{\frac{4}{3}}$，而 $(x_1x_2+y_1y_2)(x_1^{\frac{1}{3}}x_2^{\frac{1}{3}}x_3^{\frac{4}{3}}+y_1^{\frac{1}{3}}y_2^{\frac{1}{3}}y_3^{\frac{4}{3}})\ge(\sqrt{x_1x_2\cdot x_1^{\frac{1}{3}}x_2^{\frac{1}{3}}x_3^{\frac{4}{3}}}+\sqrt{y_1y_2\cdot y_1^{\frac{1}{3}}y_2^{\frac{1}{3}}y_3^{\frac{4}{3}}})^2=(x_1^{\frac{2}{3}}x_2^{\frac{2}{3}}x_3^{\frac{2}{3}}+y_1^{\frac{2}{3}}y_2^{\frac{2}{3}}y_3^{\frac{2}{3}})^2$

，故 $|\overrightarrow{a_1}||\overrightarrow{a_2}||\overrightarrow{a_3}||\vec{c}|\ge|\vec{c}|^4$，即 $|\overrightarrow{a_1}||\overrightarrow{a_2}||\overrightarrow{a_3}|\ge|\vec{c}|^3$，$x_1:x_2:x_3=y_1:y_2:y_3$ 取等，(8 分)

$$(\sin^2\theta+\cos^2\theta)(\frac{1}{\sin\theta}+\frac{8}{\cos\theta})(\frac{1}{\sin\theta}+\frac{8}{\cos\theta})$$

$$\ge(\sqrt[3]{\sin^2\theta\cdot\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{1}{\sin\theta}}+\sqrt[3]{\cos^2\theta\cdot\frac{8}{\cos\theta}\cdot\frac{8}{\cos\theta}})^3=125$$，$\tan\theta=\frac{1}{2}$ 取等，

故 $(\frac{1}{\sin\theta}+\frac{8}{\cos\theta})_{\min}=5\sqrt{5}$；　　(11 分)

(3) $\lambda+\mu<1$，　(12 分)

由 $\vec{b}=\lambda\overrightarrow{a_1}+\mu\overrightarrow{a_2}$ 知 $\begin{cases}\sqrt{x_1x_2}=\lambda x_1+\mu x_2,\\ \sqrt{y_1y_2}=\lambda y_1+\mu y_2,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}1=\lambda\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}+\mu\sqrt{\frac{x_2}{x_1}},\\ 1=\lambda\sqrt{\frac{y_1}{y_2}}+\mu\sqrt{\frac{y_2}{y_1}},\end{cases}$

令 $t_1=\sqrt{\frac{x_1}{x_2}},t_2=\sqrt{\frac{y_1}{y_2}}$，由 $(x_1-x_2)(y_1-y_2)<0$ 知 $(t_1-1)(t_2-1)<0$，即 $t_1t_2+1<t_1+t_2$，

原方程即 $\begin{cases}1=\lambda t_1+\mu\frac{1}{t_1},\\ 1=\lambda t_2+\mu\frac{1}{t_2},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\lambda=\frac{1}{t_1+t_2},\\ \mu=\frac{t_1t_2}{t_1+t_2},\end{cases}$ 故 $\lambda+\mu=\frac{t_1t_2+1}{t_1+t_2}<1$．　(17 分)

(代数证明给 5 分，几何说明给 2 分)　