成都石室中学 2024-2025 学年度下期高 2027 届期中考试

数学 参考答案

（满分 150 分，考试时间 120 分钟）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1	2	3	4	5	6	7	8
D	C	A	B	A	C	B	B

二、选择题：本大题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9	10	11
AD	ABD	ABC

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

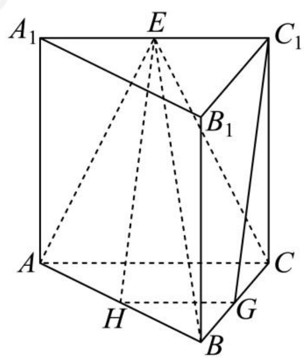
12. 108π　　　13. $\sqrt{5}+1$　　　14. $\dfrac{6\sqrt{2}}{11}$

四、解答题：本大题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

15.【答案】(1)证明见解析；　　　(2)$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

【详解】（1）取 AB 的中点 H，连接 EH,HG，$\because G$ 为 BC 的中点，$\therefore HG /\!/ \frac{1}{2}AC$ 且 $HG=\frac{1}{2}AC$，

$\because E$ 为 A_1C_1 的中点，$\therefore EC_1 /\!/ \frac{1}{2}AC$ 且 $EC_1=\frac{1}{2}AC$



$\therefore HG /\!/ EC_1$ 且 $HG=EC_1$，　$\therefore$ 四边形 $EHGC_1$ 为平行四边形，

$\therefore C_1G /\!/ EH$.

又 $\because C_1G \not\subset$ 平面 $ABE, EH \subset$ 平面 $ABE, \therefore C_1G /\!/$ 平面 ABE . ……7 分

（2）$\because AB\perp BC, AC=2, BC=1, \therefore AB=\sqrt{3}$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 1\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

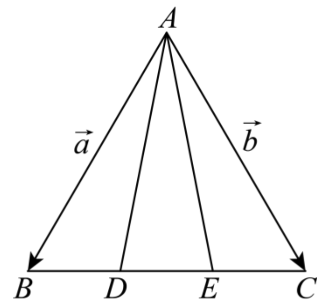
$\because A_1C_1 /\!/$ 平面 ABC，$\therefore$ 点 E 到面 ABC 的距离等于点 A_1 到面 ABC 的距离，

$\therefore V_{E-ABC}=V_{A_1-ABC}$，

又 $\because AA_1\perp$ 平面 ABC，$\therefore V_{C-ABE}=V_{E-ABC}=V_{A_1-ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\times AA_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$.……13 分

16.【答案】(1)14　　　(2)$-\dfrac{9}{16}$

【详解】（1）解：如图所示，设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}, \overrightarrow{AC}=\vec{b}, \angle BAC=\theta$，可得 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=3$ 且 $\theta=\frac{\pi}{3}$



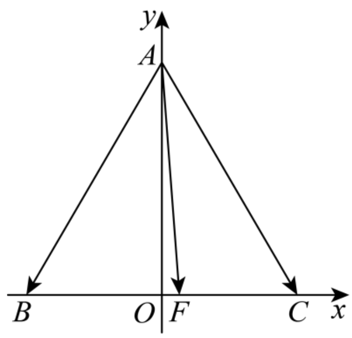
因为点 D、E 三等分线段 BC，可得 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\vec{a}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\vec{a}+\frac{1}{3}(\vec{b}-\vec{a})=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\vec{a}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\vec{a}+\frac{2}{3}(\vec{b}-\vec{a})=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$，

则

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE})\cdot\overrightarrow{AD}=(\frac{4}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b})\cdot(\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b})=\frac{8}{9}\vec{a}^2+\frac{8}{9}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{2}{9}\vec{b}^2=\frac{8}{9}\times 9+\frac{8}{9}\times 3\times 3\times\frac{1}{2}+\frac{2}{9}\times 9=14$ ……7 分

（2）解：以线段BC所在的直线为x轴，以线段的垂直平分线为y轴，建立平面直角坐标系，如图所示，



因为$\triangle ABC$是边长为3的等边三角形，可得$A(0,\dfrac{3\sqrt{3}}{2})$，$C(\dfrac{3}{2},0)$，

又因为F在线段BC上，设$F(a,0)$，其中$a\in[-\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}]$，

则$\overrightarrow{FA}=(-a,\dfrac{3\sqrt{3}}{2})\cdot\overrightarrow{FC}=(\dfrac{3}{2}-a,0)$，

所以$\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FC}=-a(\dfrac{3}{2}-a)=a^2-\dfrac{3}{2}a=(a-\dfrac{3}{4})^2-\dfrac{9}{16}$，

当且仅当$a=\dfrac{3}{4}$时，$\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FC}$取得最小值，最小值为$-\dfrac{9}{16}$.……15分

17.【答案】(1) $B=\dfrac{\pi}{3}$　　(2) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{2},\sqrt{3}+2\right)$

【详解】(1) 在$\triangle ABC$中，因为$2a-c=2b\cos C$，

所以根据正弦定理得$2\sin A-\sin C=2\sin B\cos C$，

又$A+B+C=\pi$，得$2\sin(B+C)-\sin C=2\sin B\cos C$，

所以$2\sin B\cos C+2\cos B\sin C-\sin C=2\sin B\cos C$，

所以$2\cos B\sin C=\sin C$，

因为$C\in(0,\pi)$，所以$\sin C\neq 0$，所以$\cos B=\dfrac{1}{2}$.

又$B\in(0,\pi)$，所以$B=\dfrac{\pi}{3}$.……6分

（2）因为$\triangle ABC$是锐角三角形，且由（1）知$B=\dfrac{\pi}{3}$.

所以$\begin{cases}0<A<\dfrac{\pi}{2}\\0<C<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$，即$\begin{cases}0<A<\dfrac{\pi}{2}\\0<\dfrac{2\pi}{3}-A<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$，解得$\dfrac{\pi}{6}<A<\dfrac{\pi}{2}$.

由正弦定理得：$\dfrac{b+c}{a}=\dfrac{\sin B+\sin C}{\sin A}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-A\right)}{\sin A}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\dfrac{1}{2}\sin A}{\sin A}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{1+\cos A}{\sin A}\right)+\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{1+2\cos^2\dfrac{A}{2}-1}{2\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}}\right)+\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{1}{\tan\dfrac{A}{2}}+\dfrac{1}{2}$.

因为$\dfrac{\pi}{6}<A<\dfrac{\pi}{2}$，所以$\dfrac{\pi}{12}<\dfrac{A}{2}<\dfrac{\pi}{4}$，所以$2-\sqrt{3}<\tan\dfrac{A}{2}<1$，

所以$\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}<\dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{1}{\tan\dfrac{A}{2}}+\dfrac{1}{2}<\sqrt{3}+2$，

所以$\dfrac{b+c}{a}$的范围为$\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{2},\sqrt{3}+2\right)$.……15分

18.【答案】(1) $\overrightarrow{OM}=(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2})$　　(2)① $4+4\sqrt{5}$；　　② $[-4,4)$

【详解】(1) $f(x)=2\sin^2(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{3})-1=-\cos(x+\dfrac{2\pi}{3})=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\dfrac{1}{2}\cos x$，

所以函数$f(x)$的“伴随向量”为$\overrightarrow{OM}=(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2})$.……4分

（2）①由函数 $h(x)$ 的“伴随向量”为 $\overrightarrow{OM}=(0,1)$，得 $h(x)=\cos x$，

由 $h(A)=\dfrac{3}{5}$，得 $\cos A=\dfrac{3}{5}$，$A\in(0,\pi)$，则 $\sin A=\dfrac{4}{5}$，

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

则 $16=b^2+c^2-\dfrac{6}{5}bc=(b+c)^2-\dfrac{16}{5}bc\geq(b+c)^2-\dfrac{16}{5}(\dfrac{b+c}{2})^2=\dfrac{(a+b)^2}{5}$，

$b+c\leq 4\sqrt{5}$，当且仅当 $b=c=4\sqrt{5}$ 时取等号，$a+b+c\leq 4\sqrt{5}+4$，

所以 $\triangle ABC$ 周长的最大值为 $4\sqrt{5}+4$.……9 分

②由（i）$b^2+c^2=16+\dfrac{6}{5}bc$，

$$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\sqrt{\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\sqrt{b^2+c^2+\frac{6}{5}bc}-\frac{3}{5}bc$$

$=\sqrt{16+\dfrac{12}{5}bc}-\dfrac{3}{5}bc=2\sqrt{4+\dfrac{3}{5}bc}-\dfrac{3}{5}bc$，而 $16=b^2+c^2-\dfrac{6}{5}bc\geq\dfrac{4}{5}bc$，

即 $bc\leq 20$，当且仅当 $b=c=4\sqrt{5}$ 时取等号，于是 $0<bc\leq 20$，

令 $t=\sqrt{4+\dfrac{3}{5}bc}\in(2,4]$，则 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-t^2+2t+4\in[-4,4)$

所以 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 的取值范围为 $[-4,4)$.……17 分

19.【答案】(1) $A=\dfrac{\pi}{3}$

(2)① $3\left(2-\sqrt{3}\right)$；②存在，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$，$k=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】（1）因为 $\dfrac{\cos A}{a}=\dfrac{\cos B+\cos C}{b+c}$，所以由正弦定理可得 $\dfrac{\cos A}{\sin A}=\dfrac{\cos B+\cos C}{\sin B+\sin C}$，

所以 $\sin A\cos B+\sin A\cos C=\cos A\sin B+\cos A\sin C$，

所以 $\sin A\cos B-\cos A\sin B=\cos A\sin C-\sin A\cos C$，所以 $\sin(A-B)=\sin(C-A)$，

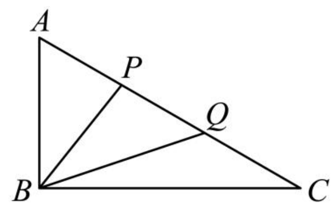
因为 $A-B\in(-\pi,\pi)$，$C-A\in(-\pi,\pi)$，

所以 $A-B=C-A$ 或 $(A-B)+(C-A)=2\times\dfrac{\pi}{2}$ 或 $(A-B)+(C-A)=2\times\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$，

即 $2A=B+C$ 或 $C=B+\pi$（舍去）或 $B=C+\pi$（舍去），又 $A+B+C=\pi$，所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$；……4 分

（2）①因为 $c\neq 2b$，所以 $B=\dfrac{\pi}{2}$，又 $A=\dfrac{\pi}{3}$，$a=2\sqrt{3}$，所以 $c=2$，$b=4$.

如图，设 $\angle QBC=x$，$x\in\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$，



则在 $\triangle QBC$ 中，由正弦定理，得 $\dfrac{BQ}{\sin C}=\dfrac{BC}{\sin(C+x)}$，

所以 $BQ=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)}$

在 $\triangle ABP$ 中，由正弦定理，得 $\dfrac{BP}{\sin A}=\dfrac{BA}{\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)}$，所以 $BP=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)}$，

$$S=\frac{1}{2}BP\cdot BQ\sin\frac{\pi}{6}=\frac{3}{4\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{3}{-2\left[\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]}=\frac{3}{\sqrt{3}+2\sin 2x}$$，

因为 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$，所以 $2x\in\left[0,\dfrac{2\pi}{3}\right]$，

故当$2x=\frac{\pi}{2}$，即$x=\frac{\pi}{4}$时，$S_{\min}=\frac{3}{\sqrt{3}+2}=3\left(2-\sqrt{3}\right)$；……10 分

②假设存在实常数θ，k，对于所有满足题意的α，β，都有$\sin 2\alpha+\sin 2\beta+k=4k\sin\alpha\sin\beta$成立，

则存在实常数θ，k，对于所有满足题意的α，β，

都有$2\sin\left(\alpha+\beta\right)\cos\left(\alpha-\beta\right)+k=2k\left[\cos\left(\alpha-\beta\right)-\cos\left(\alpha+\beta\right)\right]$，

由题意，$\alpha+\beta=\pi-\theta$是定值，所以$\sin\left(\alpha+\beta\right)$，$\cos\left(\alpha+\beta\right)$是定值，

$2\left[\sin\left(\alpha+\beta\right)-k\right]\cos\left(\alpha-\beta\right)+k\left[1+2\cos\left(\alpha+\beta\right)\right]=0$对于所有满足题意的$\alpha$，$\beta$成立，

故有$\begin{cases}\sin\left(\alpha+\beta\right)-k=0\\ k\left[1+2\cos\left(\alpha+\beta\right)\right]=0\end{cases}$，

因为$k=\sin\left(\alpha+\beta\right)\neq 0$，从而$1+2\cos\left(\alpha+\beta\right)=0$，即$\cos\left(\alpha+\beta\right)=-\frac{1}{2}$，

因为α，β为$\triangle BPQ$的内角，所以$\alpha+\beta=\frac{2\pi}{3}$，从而$\theta=\pi-\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$，$k=\frac{\sqrt{3}}{2}$.……17 分