成都石室中学2024－2025学年度下期高2027届期中考试

数学试题

（满分150分，考试时间120分钟）

注意事项：　1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.

2. 作答时，务必将答案写在答题卡上，写在试卷及草稿纸上无效.

一、单选题：本大题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知i为虚数单位，复数z满足$z(1+\mathrm{i})=1$，则$|z|=$（　　）

A. $\sqrt{2}$　　B. 1　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. 已知不重合的三条直线m,n,l和平面α，下列命题中是真命题的是（　　）

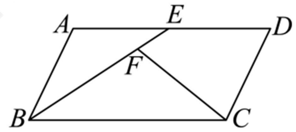
A. 如果l不平行于α，则α内的所有直线均与l异面

B. 如果$m\subset\alpha$，$n\not\subset\alpha$，m与n是异面直线，那么n与α相交

C. 如果$m\subset\alpha$，$n/\!/\alpha$，m与n共面，那么$m/\!/n$

D. 如果$m/\!/n$，那么m平行于经过n的任何平面

3. 如图，平行四边形$ABCD$中，E是AD的中点，F在线段BE上，且$\overrightarrow{BF}=3\overrightarrow{FE}$，记$\overrightarrow{BA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，则$\overrightarrow{CF}=$（　　）



A. $\frac{3}{4}\vec{a}-\frac{5}{8}\vec{b}$　　B. $\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$

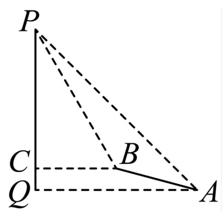
C. $\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$　　D. $\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$

4. “$\alpha\in[0,2\pi]$，点$P(\sin\alpha-\cos\alpha,\tan\alpha)$在第二象限”的一个充分不必要条件是“$\alpha\in$（　　）”

A. $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4})\cup(\pi,\frac{5\pi}{4})$　　B. $(0,\frac{\pi}{6})\cup(\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2})$

C. $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4})\cup(\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2})$　　D. $(0,\frac{\pi}{4})\cup(\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2})$

5. 学生为测量青城山高度设计了如下方案：在山脚A测得山顶P的仰角为$45°$，沿倾斜角为$15°$的斜坡向上走了$600m$到达B点（A，B，P，Q在同一个平面内），在B处测得山顶P的仰角为$60°$，则青城山的山高PQ为（　　）



A. $300(\sqrt{6}+\sqrt{2})m$　　B. $300(\sqrt{6}-\sqrt{2})m$

C. $600(\sqrt{3}+1)m$　　D. $600(\sqrt{3}-1)m$

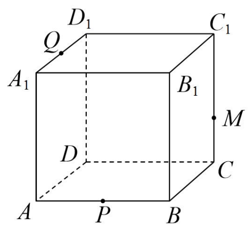
6. 已知实数x,y满足$x^2+y^2=1$，则$|x+\sqrt{3}y-7|+|8-x-\sqrt{3}y|$的最大值为（　　）

A. 15　　B. 17　　C. 19　　D. 21

7. $\triangle ABC$中，$\sin\frac{\angle ABC}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，点$D$在线段$AC$上，且$AD=3DC$，$BD=3$，则$\triangle ABC$面积最大值为（　　）

A. $4\sqrt{2}$　　B. $6\sqrt{2}$　　C. $6\sqrt{3}$　　D. $4\sqrt{3}$

8. 如图，在棱长为6正方体中，点P为棱AB的中点，点Q为棱A_1D_1的中点，点M为棱CC_1上靠近点C的三等分点，则经过P，Q，M三点的平面截该正方体所得截面的形状和与侧面CDD_1C_1的交线长度分别为（　　）



A. 五边形，$\frac{2\sqrt{181}}{5}$　　B. 六边形，$\frac{2\sqrt{181}}{5}$

C. 五边形，$\frac{2\sqrt{183}}{5}$　　D. 六边形，$\frac{2\sqrt{183}}{5}$

二、选择题:本大题共3小题,每小题6分,共18分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得6分,部分选对的得部分分,有选错的得0分.

9. 已知向量$\vec{a}=(\cos x,\sin x)$,$\vec{b}=(-1,\sqrt{3})$,(　　)

A. 若$\vec{a}\perp\vec{b}$,则$x=\frac{\pi}{6}+k\pi(k\in \mathrm{Z})$

B. 若$\vec{a}/\!/\vec{b}$,则$x=-\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}(k\in \mathrm{Z})$

C. 若$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$取得最大值,则$x=\frac{2\pi}{3}+k\pi(k\in \mathrm{Z})$

D. 若$x=-\frac{\pi}{6}$,则$\vec{a}$在$\vec{b}$上的投影向量为$(\frac{\sqrt{3}}{4},-\frac{3}{4})$

10. 已知复数z_1,z_2,则下列说法中不正确的是(　　)

A. 若$|z_1|=|z_2|$,则$z_1^2=z_2^2$

B. 若$z_1-z_2>0$,则$z_1>z_2$

C. $|z_1|=1$,$|z_2|=1$,$|z_1-z_2|=1$,则$|z_1+z_2|=\sqrt{3}$

D. $z_1z_2\in \mathrm{R}$是$z_1=\overline{z_2}$的充分不必要条件

11. 已知函数$f(x)=a(\sin x+\cos x)+b|\sin x-\cos x|$,其中$a>0,b>0$,则下列说法中正确的有(　　)

A. $f(x)$的最小值为$-\sqrt{2}a$

B. $f(x)$的最大值为$\sqrt{2a^2+2b^2}$

C. $f(x)=\sqrt{2}a$方程在$[-\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}]$上有三个解

D. $f(x)$在$(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$上单调递减

三、填空题:本大题共3小题,每小题5分,共15分.

12. 三棱锥三条侧棱两两互相垂直,且长度分别为6,6,6,其外接球的表面积为________.

13. 已知向量$\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{c}$的模长分别为2,1,1,且$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$,则$\left|\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}\right|$的最大值为________.

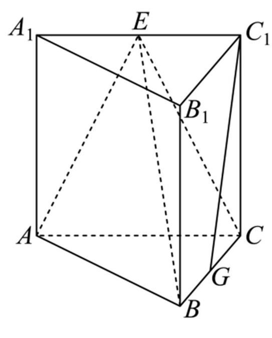
14. 在$\triangle ABC$中,若$\frac{9}{\tan A}+\frac{8}{\tan B}=\frac{5}{\tan C}$,则$\cos C$的最小值为________.

四、解答题:本大题共5小题,共77分.解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

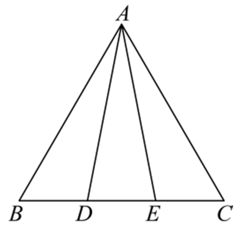
15. 如图,在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中,$AB\perp BC$,$AA_1=AC=2$,$BC=1$,E,G分别为A_1C_1,BC的中点.

(1) 证明:$C_1G/\!/$平面ABE;

(2) 求三棱锥$C-ABE$的体积.



16. 设$\triangle ABC$是边长为3的正三角形,点D,E三等分线段BC(如图所示).



(1) 求$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}$的值;

(2)F在线段BC的何处时,$\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FC}$取得最小值,并求出此最小值.

17. 在$\triangle ABC$中,角A,B,C的对边分别为a,b,c,已知$2a-c=2b\cos C$.

(1) 求角B;

(2) 若$\triangle ABC$是锐角三角形,求$\frac{b+c}{a}$的取值范围.

18. 定义向量 $\overrightarrow{OM}=(a,b)$ 的"相关函数"为 $f(x)=a\sin x+b\cos x$；函数 $f(x)=a\sin x+b\cos x$ 的"相关向量"为 $\overrightarrow{OM}=(a,b)$.

(1) 求函数 $f(x)=2\sin^2(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3})-1$ 的"相关向量" $\overrightarrow{OM}$ 的模长；

(2) 在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，若函数 $h(x)$ 的"相关向量"为 $\overrightarrow{OM}=(0,1)$，且已知 $a=4$，$h(A)=\frac{3}{5}$.

①求 $\triangle ABC$ 周长的最大值；

②求 $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 的取值范围.

19. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c. 已知 $\frac{\cos A}{a}=\frac{\cos B+\cos C}{b+c}$.

(1) 求角 A；

(2) 已知 $c\neq 2b$，$a=2\sqrt{3}$，点 P，Q 是边 AC 上的两个动点(P，Q 不重合)，记 $\angle PBQ=\theta$.

①当 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 时，设 $\triangle PBQ$ 的面积为 S，求 S 的最小值；

②记 $\angle BPQ=\alpha$，$\angle BQP=\beta$.问：是否存在实常数 θ 和 k，对于所有满足题意的 α，β，都有 $\sin 2\alpha+\sin 2\beta+k=4k\sin\alpha\sin\beta$ 成立?若存在，求出 θ 和 k 的值；若不存在，说明理由.