

# 2024~2025 学年度下期高中 2024 级期末考试

## 数 学

考试时间 120 分钟，满分 150 分

### 注意事项：

1. 答题前，考生务必在答题卡上将自己的姓名、座位号、准考证号用 0.5 毫米的黑色签字笔填写清楚，考生考试条形码由监考老师粘贴在答题卡上的“贴条形码区”。
2. 选择题使用 2B 铅笔填涂在答题卡上对应题目标号的位置上，如需改动，用橡皮擦擦干净后再填涂其它答案；非选择题用 0.5 毫米的黑色签字笔在答题卡的对应区域内作答，超出答题区域答题的答案无效；在草稿纸上、试卷上答题无效。
3. 考试结束后由监考老师将答题卡收回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 函数  $f(x) = \tan x$  的定义域为

A.  $\{x | x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$

B.  $\{x | x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$

C.  $\{x | x \neq \pi + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$

D.  $\{x | x \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$

2. 棱长为 2 的正方体的 8 个顶点都在球  $O$  的表面上，则球  $O$  的半径为

A. 1

B.  $\sqrt{2}$

C.  $\sqrt{3}$

D. 2

3. 在  $\triangle ABC$  中， $AB = 4$ ， $AC = 3$ ， $\angle BAC = \frac{\pi}{6}$ ，则  $\triangle ABC$  的面积为

A. 2

B. 3

C. 4

D. 6

4. 据《九章算术》记载，我国匠人常需计算不同几何体表面积或体积的比例以优化用料，例如，制作圆锥形与球形装饰物时，需比较两者的表面积以确定所需涂漆或覆盖材料的用量。若圆锥的底面直径和母线都等于球的直径，则圆锥与球的表面积之比为

A.  $\frac{2}{3}$

B.  $\frac{2}{\pi}$

C.  $\frac{3}{4}$

D.  $\frac{4}{\pi}$

5. 若单位向量  $e_1$ ， $e_2$  满足  $|e_1 + e_2| = 1$ ，则  $e_1$ ， $e_2$  的夹角为

A.  $\frac{\pi}{6}$

B.  $\frac{\pi}{3}$

C.  $\frac{\pi}{2}$

D.  $\frac{2\pi}{3}$

6. 已知圆台的上、下底面半径分别为 1 和 2，且圆台的母线与一底面所成的角的大小为  $\frac{\pi}{4}$ ，则圆台的体积为

A.  $\frac{4\pi}{3}$

B.  $\frac{7\pi}{3}$

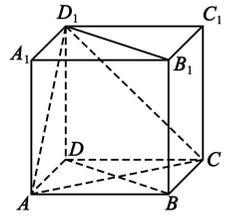
C.  $\frac{5\pi}{2}$

D.  $3\pi$

7. 如图在正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中, 过直线  $AA_1$  且平行于平面  $BDD_1B_1$  的平面  $\alpha$  交平面  $ACD_1$  于直线  $l$ , 则直线  $AA_1$  与  $l$  所成角的正切值为

- A.  $\frac{1}{2}$   
C.  $\sqrt{2}$

- B.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$   
D. 2



8. 在  $\triangle ABC$  中, 若  $A - B = \frac{\pi}{3}$ , 且  $\sin A + \sin B = 1$ , 则  $\cos C =$

A.  $-\frac{1}{3}$

B.  $\frac{1}{3}$

C.  $-\frac{7}{9}$

D.  $\frac{7}{9}$

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分。在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分。

9. 已知函数  $f(x) = \cos(2x + \frac{\pi}{4}) + 1$ , 则

A.  $f(x)$  的最小正周期为  $\pi$

B.  $f(x)$  的对称中心为  $(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, 1) (k \in \mathbf{Z})$

C.  $f(x)$  的对称轴为  $x = \frac{5\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$

D. 方程  $f(x) = 1$  在区间  $[0, \pi]$  上恰有两根

10. 已知  $\alpha, \beta$  是两个不同的平面,  $a, b$  是两条不同的直线, 下列命题正确的是

A. 若  $a \parallel b, b \subset \beta, \alpha \parallel \beta$ , 则  $a \parallel \alpha$

B. 若  $a \parallel \alpha, a \subset \beta, \alpha \cap \beta = b$ , 则  $a \parallel b$

C. 若  $a \perp \alpha, b \perp \beta, a \perp b$ , 则  $\alpha \perp \beta$

D. 若  $\alpha \perp \beta, a \subset \alpha, b \subset \beta$ , 则  $a \perp b$

11. 在  $\triangle ABC$  中, 已知  $\angle BAC = \frac{\pi}{2}, AB = AC, D$  是  $AC$  的中点, 若  $P$  是  $BC$  上的一点,

且满足  $\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{PC}$ ,  $AP$  与  $BD$  交于点  $E$ , 则

A.  $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

B.  $\overrightarrow{AP}$  在  $\overrightarrow{AB}$  上的投影向量为  $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

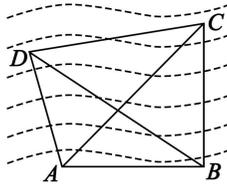
C.  $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$

D.  $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AP}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 在平面直角坐标系中，已知点  $B$  的坐标为  $(4, -3)$ ，若向量  $\overrightarrow{AB} = (2, 3)$ ，则点  $A$  的坐标为\_\_\_\_\_.

13. 如图，某学习小组为了测量湖中两小岛  $C, D$  间的距离，在岸边选取了相距 2 km 的  $A, B$  两点，满足  $A, B, C, D$  在同一平面内，测得  $\angle DAC = 60^\circ$ ， $\angle CAB = 45^\circ$ ， $\angle DBA = 30^\circ$ ， $\angle DBC = 60^\circ$ ，则  $CD =$ \_\_\_\_\_ km.



14. 以点  $O$  为球心，半径为  $3\sqrt{3}$  的球的表面与以点  $O$  为顶点，棱长为 6 的正四面体表面的交线为  $P$ ，则  $P$  的总长度为\_\_\_\_\_.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分)

已知平面向量  $\mathbf{a} = (2, 1)$ ， $\mathbf{b} = (m - 2, 4 - 2m)$ ， $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ .

(1) 若  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ ，求实数  $m$  的值；

(2) 证明：对任意的  $\lambda \neq 0$ ，都有  $\mathbf{a} \perp \lambda(\mathbf{a} - \mathbf{c})$ ；

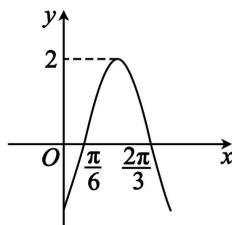
(3) 若  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{c}$  的夹角为  $\frac{\pi}{4}$ ，求  $|\mathbf{c}|$  的值.

16. (15 分)

已知函数  $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$  ( $x \in \mathbf{R}$ ， $A > 0$ ， $\omega > 0$ ， $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ) 的部分图象如图所示.

(1) 求  $f(x)$  的解析式；

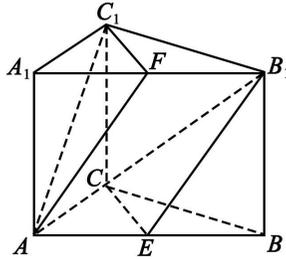
(2) 求  $f(x)$  的单调递增区间及  $f(x)$  在  $[0, \frac{\pi}{2}]$  上的最大值与最小值.



17. (15分)

如图, 在正三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中,  $AB = \sqrt{2}AA_1$ ,  $E, F$  分别是  $AB, A_1B_1$  的中点.

- (1) 求证:  $CE \perp$  平面  $ABB_1A_1$ ;
- (2) 求证: 平面  $AFC_1 \parallel$  平面  $CEB_1$ ;
- (3) 求直线  $AC_1$  与直线  $CB_1$  所成角的大小.



18. (17分)

在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 已知  $a \cos C + \sqrt{3}c \sin A = b + 2c$ .

- (1) 求角  $A$  的大小;
- (2) 设  $D$  为边  $BC$  上一点, 且满足  $AD = 1$ .
  - (i) 若  $AB = 2, AB \perp AD$ , 求  $AC$  的长;
  - (ii) 若  $BD = DC$ , 求  $BC$  的取值范围.

19. (17分)

如图,  $AB$  是圆  $O$  的直径, 点  $C$  是圆  $O$  上的动点, 过点  $A$  的直线  $PA$  垂直于圆  $O$  所在的平面.

- (1) 证明:  $BC \perp PC$ ;
- (2) 已知  $PA = 4, AB = 6, \angle AOC = \frac{\pi}{3}$ , 设点  $C$  关于直线  $AB$  的对称点为  $D$ .
  - (i) 求二面角  $C-PB-D$  的余弦值;
  - (ii) 若  $\triangle PBC$  及其内部存在点  $Q$  使得四面体  $QPAD$  与五面体  $QACBD$  的体积相等, 求  $|PQ|$  的最小值.

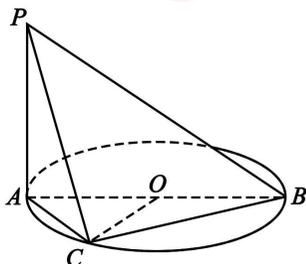


图 1

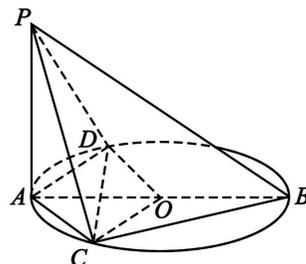


图 2