成都七中高 2027届高一下学期期末数学考试题答案

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的）

1	2	3	4	5	6	7	8
B	D	A	A	C	C	B	A

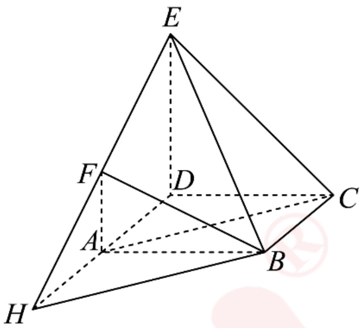
二、选择题（本大题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分，在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分）

9	10	11
ABC	ACD	ACD

三、填空题（本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分）

12. $2\sqrt{3}$　　**13.** 3　　**14.** $\frac{1}{27}$

11 题解：容易判定 **A** 正确，**B** 错误，**D** 正确. 如图，延长 EF 与 DA 延长线交于 H，连接 AC，HB.



对 **C**：由 $DA=AH=BC$，则 $S_{\triangle AHB}=\frac{1}{3}S_{四边形DHBC}$，

则 $V_{EFABCD}=V_{E-DHBC}-V_{F-AHB}=\frac{1}{3}S_{四边形DHBC}\cdot h-\frac{1}{3}S_{\triangle AHB}\cdot\frac{1}{2}h$

$=S_{\triangle AHB}\cdot h-\frac{1}{6}S_{\triangle AHB}\cdot h=\frac{5}{6}S_{\triangle AHB}\cdot h=\frac{5}{6}\times\frac{1}{2}\times1\times2\times h=\frac{5}{6}h$，

其中 h 为点 E 到平面 $ABCD$ 距离，则 $h\le2$，故 $V_{EFABCD}\le\frac{5}{6}\times2=\frac{5}{3}$；故 **C** 正确；

14 题解：共比赛 6 场，丙与丁之间无论比赛结果如何，不影响甲队胜 2 场且乙队胜 2 场，所以分以下情况：

若甲胜乙丙，乙胜丙丁，概率为 $\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{2}{81\times3}$，

若甲胜乙丁，乙胜丙丁，概率为 $\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{2}{81\times3}$，

若甲胜丙丁，乙胜丙丁，甲平乙；或甲胜丙丁，乙胜甲丙；或甲胜丙丁，乙胜甲丁.

其概率为 $\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times2=\frac{5}{3\times81}$，

所以甲队胜 2 场且乙队胜 2 场的概率为 $P=\frac{2}{81\times3}+\frac{2}{81\times3}+\frac{5}{81\times3}=\frac{1}{27}$.故答案为：$\frac{1}{27}$

四、解答题（本大题共 **5** 小题，其中 15 题 13 分，16 题与 17 题均为 15 分，18 题与 19 题均为 17 分，共 **77** 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

15. 解：（**1**）$\left(0.005+0.010+0.015+x+0.040\right)\times 10=1$，则 $x=0.030$，

$\because 0.05+0.1+0.15=0.3<0.4$；$0.3+0.3=0.6>0.4$，

故 **40** 百分位数在[**80, 90**)层，则 **40** 百分位数为 $80+\dfrac{0.4-0.3}{0.6-0.3}\times 10\approx 83.3$，

平均数 $\overline{x}=55\times 0.05+65\times 0.1+75\times 0.15+85\times 0.3+95\times 0.4=84$；………7 分

（**2**）因为按比例分配的分层随机抽样，故[**50, 60**)，[**60, 70**)，[**70, 80**)三层中抽取的样本量分别为：

$6\times\dfrac{0.05}{0.05+0.10+0.15}=1$；$6\times\dfrac{0.1}{0.05+0.10+0.15}=2$；$6\times\dfrac{0.15}{0.05+0.10+0.15}=3$

从这 **6** 人中随机抽取两人，记[**50, 60**)中抽取的人编号为 **1**，[**60, 70**)中抽取的人编号为 **2**、**3**，[**70, 80**)中抽取的人编号为 **4**、**5**、**6**，记事件 $A=$ “抽取的两人都及格”．

$\Omega=\left\{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,4),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6),(5,6)\right\}$，

所以 $n\left(\Omega\right)=15$；

$A=\left\{(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,4),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6),(5,6)\right\}$，所以 $n\left(A\right)=10$；

$\therefore\ P(A)=\dfrac{n\left(A\right)}{n(\Omega)}=\dfrac{10}{15}=\dfrac{2}{3}$.………13 分

16. 解析：（**1**）$f\left(x\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)+\sqrt{3}\sin x\cos x$

$=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x=\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-2x\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x$

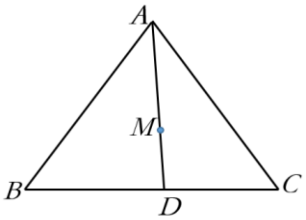
$=\dfrac{1}{2}\cos 2x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 最小正周期为 π．………7 分

（**2**）$f\left(\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\alpha}{2}\right)=\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，由 $\dfrac{5\pi}{6}<\alpha<\dfrac{7\pi}{6}$，则 $\dfrac{7\pi}{6}<\alpha+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{3\pi}{2}$，

则 $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{1-\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2}=-\dfrac{1}{3}$，而 $\sin\alpha=\sin\left[\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)-\dfrac{\pi}{3}\right]$

$\sin\alpha=\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)\cos\dfrac{\pi}{3}-\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{6}$；………15 分

17. 解：(1)由$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，得$b=\frac{a\sin B}{\sin A}$，代入已知条件$\sqrt{3}b\cos A=a\sin B$，得$\sqrt{3}\cdot\frac{a\sin B}{\sin A}\cdot\cos A=a\sin B$，



两边约去$a\sin B(\sin B\neq 0)$得：$\sqrt{3}\cdot\frac{\cos A}{\sin A}=1$，

即$\tan A=\sqrt{3}$而$A\in(0,\pi)$，故$A=\frac{\pi}{3}$. ………6 分

(2)因为点 M 是$\triangle ABC$的内心，$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}c\cdot AD\sin\frac{A}{2}$，$S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}b\cdot AD\sin\frac{A}{2}$，

$\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}$，$AD=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，从而$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}(b+c)\cdot AD\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}(b+c)\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{6}(b+c)$.

又$S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}bc$，所以$\frac{\sqrt{3}}{4}bc=\frac{\sqrt{3}}{6}(b+c)$，即$3bc=2(b+c)$.

由余弦定理$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$可得$4=b^2+c^2-bc=(b+c)^2-3bc$.

将$3bc=2(b+c)$代入上式得$4=(b+c)^2-2(b+c)$.

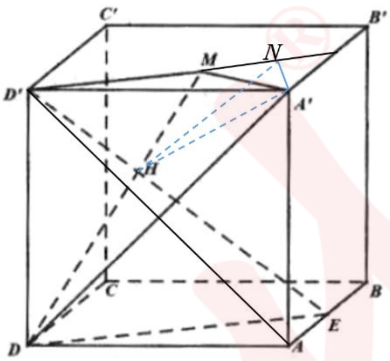
解得$b+c=1\pm\sqrt{5}$，因为$b+c>0$，所以$b+c=1+\sqrt{5}$.

所以$\triangle ABC$的周长为$a+b+c=2+1+\sqrt{5}=3+\sqrt{5}$. ………15 分

18. 解：(1)证明：$\because D'E\cap DM=H$，$\therefore D'$，M，E，D四点共面，

$\because$平面$A'B'C'D'$//平面 $ABCD$，平面$D'MED\cap$平面$A'B'C'D'=D'M$，平面$D'MED\cap$平面$ABCD=DE$，

$\therefore D'M//DE$，$\because D'M\not\subset$平面$A'DE$，$DE\subset$平面$A'DE$，$\therefore D'M//$平面$A'DE$；………5 分



(2)(i)证明：如图所示，连接AD'，$\because AB\perp$平面$AA'D'D$，$A'D\subset$平面$AA'D'D$，

$\therefore AB\perp A'D$，又$A'D\perp AD'$，AD'，$AB\subset$平面$A'DE$，$AD'\cap AB=A$，$\therefore A'D\perp$平面$AD'E$，$\because D'E\subset$平面$AD'E$，$\therefore A'D\perp D'E$，又$\because D'E\perp DM$，$A'D$，$DM\subset$平面$A'MD$，$A'D\cap DM=D$，$\therefore D'E\perp$平面$A'MD$；………10 分

(ⅱ)解：如图所示，在平面$A'B'C'D'$内作$A'N\perp$直线$D'M$垂足为 N，连接NH、$A'H$，设$AE=x$.

$\because A'N\perp D'M$，$A'N\perp D'D$，$D'M\cap D'D=D'$，$D'M$，$D'D\subset$平面$D'DE$，

$\therefore A'N\perp$平面$D'DE$，$\therefore\angle A'HN$即为直线$A'H$与平面$D'DE$所成角.

$\because A'A//$平面$D'DE$，$\therefore A'N=d_{A-\text{平面}D'DE}=d_{A-DE}=\frac{x\cdot 2}{\sqrt{x^2+4}}$，

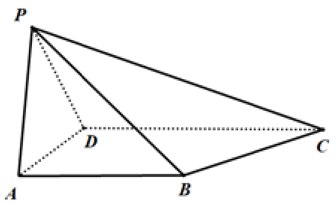
$\because D'E\perp$平面$A'MD$，$A'H\subset$平面$A'MD$，$\therefore D'E\perp A'H$，$\therefore A'H=\frac{2\cdot\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+8}}$，

$\therefore\sin\angle A'HN=\frac{A'N}{A'H}=\frac{x\sqrt{x^2+8}}{x^2+4}=\frac{3}{5}\Rightarrow x^4+8x^2-9=0\Rightarrow x=1$，

$\therefore$当$AE=1$时，直线$A'H$与平面$D'DE$所成角的正弦值为$\frac{3}{5}$. ………17 分

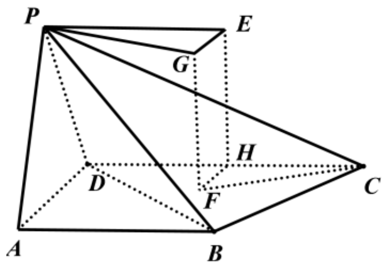
19. 解：（1）证明：由已知 $AD\perp CD, PD\perp AD$．$CD\cap PD=D$．$CD\subset$平面$PCD, PD\subset$平面PCD，得 $AD\perp$平面PCD，而 $AD\subset$平面$ABCD$，从而平面$PCD\perp$平面$ABCD$．………5 分

（2）由 $AD\perp CD$，$PD\perp AD$，知二面角 ***P-AD-B*** 的平面角即为 $\angle PDC$．



$\cos\angle PDC=\dfrac{t^2+(4-t)^2-9}{2t(4-t)}=\dfrac{2t^2-8t+7}{-2t^2+8t}=-1-\dfrac{7}{2t^2-8t}$，由题意结合三角形两边之差小于第三边知 $t\in(\dfrac{1}{2},3)$，得 $2t^2-8t\in[-8,-\dfrac{7}{2})$．所以 $\cos\angle PDC$ 的范围是 $[-\dfrac{1}{8},1)$．二面角 ***P-AD-B*** 的余弦的取值范围是 $[-\dfrac{1}{8},1)$．………10 分

（3）设$\triangle PCD$和$\triangle BCD$的外接圆圆心分别 E 和 F，则球心为过点 E 和 F 且分别垂直于平面 PCD、平面 BCD 的两直线的交点为 G．



在$\triangle PCD$中，因为$\angle PDC=120^\circ$，由余弦定理得 $PC=\sqrt{t^2-4t+16}$，再由正弦定理得$\triangle PCD$的外接圆半径 $r_1=PE=\dfrac{PC}{2\sin120^\circ}=\sqrt{\dfrac{t^2-4t+16}{3}}$．

在$\triangle BCD$中，由余弦定理得 $BD=\sqrt{t^2-6t+10}$，再由正弦定理得$\triangle BCD$的外接圆半径 $r_2=CF=\dfrac{BD}{2\sin45^\circ}=\sqrt{\dfrac{t^2-6t+10}{2}}$．过点 F 作 $FH\perp CD$ 于 H，连接 EH，设 $PG=R$，显然四边形 $GFHE$ 为矩形，所以 $GE^2=PG^2-PE^2=FH^2=CF^2-CH^2$．所以 $R^2-r_1^2=r_2^2-\left(\dfrac{CD}{2}\right)^2$，即 $R^2=r_1^2+r_2^2-\left(\dfrac{CD}{2}\right)^2=\dfrac{t^2-4t+16}{3}+\dfrac{t^2-6t+10}{2}-\dfrac{t^2-8t+16}{4}$，

所以 $R^2=\dfrac{7t^2-28t+76}{12}=\dfrac{7}{12}(t-2)^2+4$，故当 $t=2$ 时，R^2 取得最小值，即 $R_{\min}=2$，此时三棱锥 $P-BCD$ 外接球的体积最小值为$\dfrac{4\pi R_{\min}^3}{3}=\dfrac{32\pi}{3}$．………17 分