

2025 年上海卷数学卷高考真题带答案带解析文字版

一、填空题（本大题共有 12 题，满分 54 分. 其中第 1-6 题每题 4 分，第 7-12 题每题满分 5 分）

1. 已知全集 $U = \{x | 2 \leq x \leq 5, x \in \mathbf{R}\}$, 集合 $A = \{x | 2 \leq x < 4, x \in \mathbf{R}\}$, 则 $\bar{A} =$ _____.

【答案】 $[4, 5]$

【解析】由题意, $\bar{A} = [4, 5]$

2. 不等式 $\frac{x-1}{x-3} < 0$ 的解集为_____.

【答案】 $(1, 3)$

【解析】由题意, $(x-3)(x-1) < 0 \Rightarrow x \in (1, 3)$

3. 等差数列 a_n , $a_1 = -3$, 公差 $d = 2$, 则 $S_6 =$ _____.

【答案】12

【解析】由题意, $a_6 = a_1 + 5d = 7 \Rightarrow S_6 = 12$

4. 在二项式 $(2x-1)^5$ 的展开式中, x^3 的系数为_____.

【答案】80

【解析】由题意, $C_5^r \cdot 2^{5-r} \cdot x^{5-r} \cdot (-1)^r \Rightarrow r=2$ 时为 80

5. 函数 $y = \cos x$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}]$ 上的值域为_____.

【答案】 $[0, 1]$

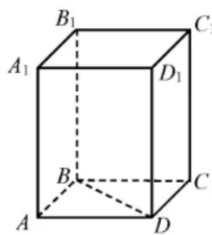
【解析】由题意, $y = \cos x$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ 单调递增, 在 $[0, \frac{\pi}{4}]$ 单调递减, 易得值域为 $[0, 1]$

6. 已知随机变量 X 的分布为 $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$, 则期望 $E[X] =$ _____.

【答案】6.3

【解析】 $E(X) = 5 \times 0.2 + 6 \times 0.3 + 7 \times 0.5 = 6.3$

7. 如图, 在正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $BD = 4\sqrt{2}$, $DB_1 = 9$, 则该正四棱柱的体积为_____.



【答案】112

【解析】由题意， $AA_1 = 7$ ， $AB = 4 \Rightarrow V = 112$

8. 设 $a, b > 0$ ， $a + \frac{1}{b} = 1$ ，则 $b + \frac{1}{a}$ 的最小值为_____.

【答案】4

【解析】 $b = \frac{1}{1-a} \Rightarrow \frac{1}{a} + b = \frac{1}{a} + \frac{1}{1-a} = (\frac{1}{a} + \frac{1}{1-a})(a+1-a) = 2 + \frac{a}{1-a} + \frac{1-a}{a} \geq 4$

9. 4 个家长和 2 个儿童去爬山. 6 个人需要排成一条队列，要求队列的头和尾均是家长，则不同的排列个数有_____种.

【答案】288

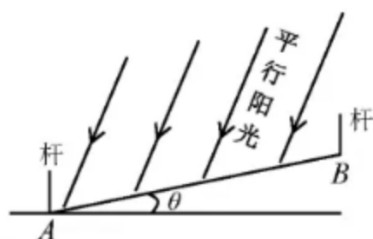
【解析】由题意， $P_4^2 \cdot P_4^4 = 288$.

10. 已知复数 z 满足 $z^2 = (\bar{z})^2$ ， $|z| \leq 1$ ，则 $|z - 2 - 3i|$ 的最小值是_____.

【答案】 $\sqrt{10}$

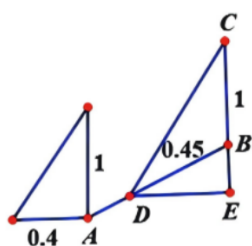
【解析】由题意，设 $z = a + bi$ ，则 $z^2 = (\bar{z})^2 \Rightarrow a = 0$ 或 $b = 0$ ， $|z| \leq 1 \Rightarrow a^2 + b^2 \leq 1$ ，故 z 表示复平面 $x = 0 (-1 \leq y \leq 1)$ 或 $y = 0 (-1 \leq x \leq 1)$ ，故 $|z - 2 - 3i|$ 表示 z 在复平面上与 $(2, 3)$ 的距离，故位于 $(0, 1)$ 时最小值为 $2\sqrt{2}$

11. 小申同学观察发现，生活中有些时候影子可以完全投射在斜面上. 某斜面上有两根长为 1 米的垂直于水平面放置的杆子，与斜面的接触点分别为 A、B，它们在阳光的照射下呈现出影子，阳光可视为平行光：其中一根杆子的影子在水平面上，长度为 0.4 米；另一根杆子的影子完全在斜面上，长度为 0.45 米. 则斜面的底角 $\theta =$ _____. (结果用角度制表示，精确到 0.01°)



【答案】12.58°

【解析】由题意 $BE = 0.45 \sin \theta, DE = 0.45 \cos \theta \Rightarrow \frac{DE}{CE} = \frac{0.45 \cos \theta}{0.45 \sin \theta + 1} = \frac{0.4}{1}$, 由 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \theta = 12.58^\circ$



$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 是平面内三个不同的单位向量. 若 $f(\vec{a} \cdot \vec{b}) + f(\vec{b} \cdot \vec{c}) + f(\vec{c} \cdot \vec{a}) = 0$, 则 $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$ 的取值范围是_____.

【答案】 $(1, \sqrt{5})$

【解析】若 $f(\vec{a} \cdot \vec{b}) = f(\vec{b} \cdot \vec{c}) = f(\vec{c} \cdot \vec{a}) = 0 \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 两两垂直显然不成立;

$$\begin{cases} f(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 1 \\ f(\vec{b} \cdot \vec{c}) = 0 \\ f(\vec{c} \cdot \vec{a}) = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{a} = (\cos \theta, \sin \theta) \\ \vec{b} = (1, 0) \\ \vec{c} = (0, 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \theta > 0 \\ \sin \theta < 0 \end{cases} \Rightarrow \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$$

$$\text{故不妨设 } |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = \sqrt{(1 + \cos \theta)^2 + (1 + \sin \theta)^2} = \sqrt{3 + 2\sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)} \in (1, \sqrt{5})$$

二、选择题 (本大题共有 4 题, 满分 18 分, 其中第 13-14 题每题满分 4 分, 第 15-16 题每题满分 5 分) 每题有且只有一个正确答案。

13. 已知事件 A、B 相互独立, 事件 A 发生的概率为 $P(A) = \frac{1}{2}$, 事件 B 发生的概率为 $P(B) = \frac{1}{2}$,

则事件 $A \cap B$ 发生的概率 $P(A \cap B)$ 为 ()

A. 0

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{2}$

D. 1

【答案】B

【解析】由题意， $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4}$

14. 设 $a > 0, s \in \mathbf{R}$. 下列各项中，能推出 $a^s > a$ 的一项是 ()

A. $a > 1$, 且 $s > 0$.

B. $a > 1$, 且 $s > 0$.

C. $0 < a < 1$, 且 $s < 0$.

D. $0 < a < 1$, 且 $s < 0$.

【答案】D

【解析】由题意， $a > 1$ 时 $a^s > a \Rightarrow s > 1$; $0 < a < 1$ 时 $a^s > a \Rightarrow s < 1$, 故选 D

15. 已知 $A(0, 1), B(1, 2)$, C 在 $\Gamma: x^2 - y^2 = 1 (x \geq 1, y \geq 0)$ 上, 则 $\triangle ABC$ 的面积 ()

A. 有最大值, 但没有最小值.

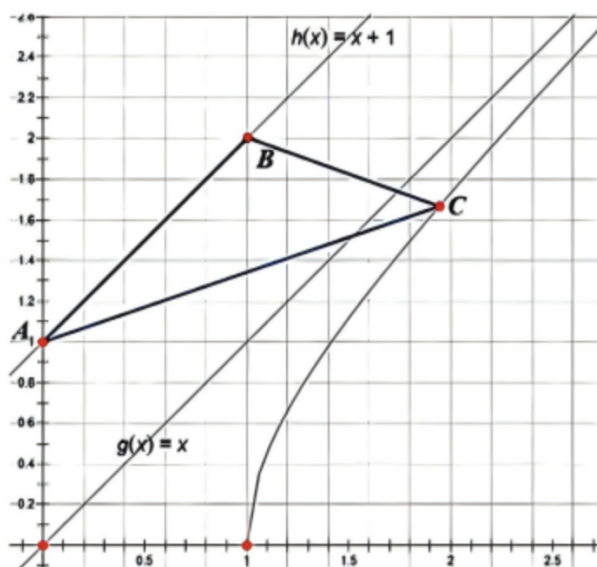
B. 没有最大值, 但有最小值.

C. 既有最大值, 也有最小值.

D. 既没有最大值, 也没有最小值.

【答案】A

【解析】由题意, AB 与渐近线平行, 故当 C 无限逼近渐近线时, $\triangle ABC$ 在 AB 上的高无限逼近渐近线与 AB 的距离, 故无最小值; 当 C 位于 $(1, 0)$ 时, $\triangle ABC$ 在 AB 上的高最大, 此时面积有最大值。



16. 设 $\lambda \in [0, 1]$, 数列 $a_n = 10n - 9$, 数列 $b_n = 2^n$. 设 $c_n = \lambda a_n + (1 - \lambda)b_n$. 若对任意 $\lambda \in [0, 1]$, 长为 a_n 、 b_n 、 c_n 的线段均能构成三角形, 则满足条件的 n 有 ()

- A. 1 个.
- B. 3 个.
- C. 4 个.
- D. 无穷.

【答案】B

【解析】不妨设 $A(n, a_n), B(n, b_n), C(n, c_n)$,

由 $c_n = \lambda a_n + (1 - \lambda)b_n \Rightarrow C$ 在线段 AB 上, 故令 $10x - 9 = 2^x \Rightarrow x_1 \in (1, 2), x_2 \in (5, 6)$

故列举:

当 $n = 1$ 时, $A(1, 1), B(1, 2), \lambda = 1 \Rightarrow C(1, 1) \Rightarrow a_n + c_n = b_n$ 显然不成立;

当 $n = 2$ 时, $A(2, 11), B(2, 4), \lambda = 0 \Rightarrow C(2, 4) \Rightarrow b_n + c_n < a_n$ 显然不成立;

同理易得当 $n \in \{2, 3, 4, 5\}$ 时, $b_n + c_n > a_n \Rightarrow n = 4$ 或 $n = 5$;

当 $n > 5$ 时, $2a_n > b_n \Rightarrow n = 6$;

综上, 应为 3 个。

三、解答题 (本大题共有 5 题, 满分 78 分)

17. 2024 年东京奥运会, 中国获得了男子 4×100 米混合泳接力金牌. 以下是历届奥运会男子 4×100 米混合泳接力项目冠军成绩记录 (单位: 秒), 数据按照升序排列.

206.78 207.46 207.95 209.34 209.35
210.68 213.73 214.84 216.93 216.93

(1) 求这组数据的极差与中位数；

(2) 从这 10 个数据中任选 3 个，求恰有 2 个数据在 211 以上的概率；

(3) 若比赛成绩 y 关于年份 x 的回归方程为 $y = -0.311x + \hat{b}$ ，年份 x 的平均数为 2006，预测 2028 年冠军队的成绩（精确到 0.01 秒）

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析 (3) 见解析

【解析】(1) 由题意，数据最大值为 216.93，最小值为 206.78，

故极差为 $216.93 - 206.78 = 10.15$ ，中位数为 $\frac{209.35 + 210.68}{2} = 210.015$

(2) 由题意，数据共有 10 个，211 以上数据共有 4 个，故设恰有 2 个数据在 211 以上为

事件 A， $P(A) = \frac{C_4^2 \cdot C_6^1}{C_{10}^3} = \frac{3}{10}$ ，故恰有 2 个数据在 211 以上的概率为 $\frac{3}{10}$

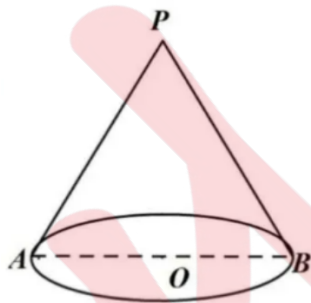
(3) 由题意，比赛成绩 y 的平均数为

$$\frac{206.78 + 207.46 + 207.95 + 209.34 + 209.35 + 210.68 + 213.73 + 214.84 + 216.93 + 216.93}{10} = 211.399,$$

故 $y = -0.311x + \hat{b}$ 过 $(2006, 211.399)$ ，则 $\hat{b} = 835.265$ 即 $y = -0.311x + 835.265$

故当 $x = 2028$ 时， $y = 204.557$ ，故 2028 年冠军队的成绩约为 204.557.

18. 如图，P 是圆锥的顶点，O 是底面圆心，AB 是底面直径，且 $AB = 2$.



(1) 若直线 PA 与圆锥底面的所成角为 $\frac{\pi}{3}$ ，求圆锥的侧面积；

(2) 已知 Q 是母线 PA 的中点，点 C、D 在底面圆周上，且弧 $\widehat{AC}$ 的长为 $\frac{\pi}{3}$ ， $CD \parallel AB$. 设点 M 在线段 OC 上，证明：直线 $QM \parallel$ 平面 PBD.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】(1) 联结 PO，由题意， $\angle PAO = \frac{\pi}{3}$ ， $AO = 1$ ，故 $PA = 2AO = 2$ ，即

$$S_{\text{侧}} = \pi \cdot AO \cdot PA = 2\pi$$

(2) (在此展示向量处理, 几何法可利用平面平行推线面平行)

由题意, 过 O 作 $l \perp$ 平面 PAB , 以 O 为原点, l 为 x 轴, AB 所在直线为 y 轴, OP 所在直线为 z 轴,

建立空间直角坐标系, 设 $OP = h$,

$$\text{则 } P(0, 0, h), B(0, 1, 0), C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right), D\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), Q\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{h}{2}\right),$$

$$\text{则 } \overrightarrow{BP} = (0, -1, h), \overrightarrow{BD} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right), \text{ 设平面 } PAB \text{ 法向量为 } \vec{n} = (x, y, z),$$

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{BP} \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{BD} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BP} = -y + hz = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BD} = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y = 0 \end{cases}, \text{ 令 } z = 1 \Rightarrow \vec{n} = \left(\frac{\sqrt{3}h}{3}, h, 1\right)$$

$$\text{设 } T\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t, -\frac{1}{2}t, 0\right), \text{ 则 } \overrightarrow{QT} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t, -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}, -\frac{h}{2}\right),$$

$$\text{则 } \overrightarrow{QT} \cdot \vec{n} = \frac{1}{2}ht - \frac{1}{2}ht + \frac{h}{2} - \frac{h}{2} = 0, \text{ 即 } \overrightarrow{QT} \perp \vec{n},$$

由 QT 不在平面 PBD 内, 故直线 $QT \parallel$ 平面 PBD .

19. 已知 $f(x) = x^2 - (m+2)x + m \ln x$, $m \in \mathbf{R}$.

(1) 若 $f(1) = 0$, 求不等式 $f(x) \leq x^2 - 1$ 的解集;

(2) 若函数 $y = f(x)$ 满足在 $(0, +\infty)$ 上存在极大值, 求 m 的取值范围;

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】(1) 由题意, $f(1) = 1 - m - 2 = 0 \Rightarrow m = -1 \Rightarrow f(x) = x^2 - x - \ln x$,

$$\text{故 } x^2 - x - \ln x \leq x^2 - 1 \Rightarrow x + \ln x - 1 \geq 0,$$

设 $g(x) = x + \ln x - 1, x > 0$, 由 $y = x$ 与 $y = \ln x$ 均为增函数, 故 $g(x)$ 为增函数,

由 $g(1) = 0$ 得 $g(1) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$, 故解集为 $[1, +\infty)$

$$(2) \text{ 由题意, } f'(x) = 2x - (m+2) + \frac{m}{x} = \frac{2x^2 - (m+2)x + m}{x} = \frac{(x-1)(2x-m)}{x},$$

$$\text{故分类讨论, 当 } m \leq 0 \text{ 时, } f'(x) = \frac{(x-1)(2x-m)}{x} \geq 0 \Rightarrow x \geq 1,$$

故 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 单调递增, 故 $f(x)$ 无极大值不成立;

当 $m > 0$ 时, 分类讨论,

$$\text{当 } m = 2 \text{ 时, } f'(x) = \frac{2(x-1)^2}{x} \geq 0 \text{ 恒成立, } f(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 单调递增, 故 } f(x) \text{ 无极大}$$

不成立;

当 $0 < m < 2$ 时, $f'(x) = \frac{(x-1)(2x-m)}{x} \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$ 或 $0 < x \leq \frac{m}{2}$,

$f(x)$ 在 $(0, \frac{m}{2})$ 和 $(1, +\infty)$ 单调递增, 在 $(\frac{m}{2}, 1)$ 单调递减, 故 $f(x)$ 在 $x = \frac{m}{2}$ 处取得极大值;

当 $m > 2$ 时, $f'(x) = \frac{(x-1)(2x-m)}{x} \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{m}{2}$ 或 $0 < x \leq 1$,

$f(x)$ 在 $(0, 1)$ 和 $(\frac{m}{2}, +\infty)$ 单调递增, 在 $(1, \frac{m}{2})$ 单调递减, 故 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极大值;

综上, $m \in (0, 2) \cup (2, +\infty)$

20. 已知椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{5} = 1 (a > \sqrt{5})$, $M(0, m) (m > 0)$, A 是 Γ 的右顶点.

(1) 若 Γ 的焦点是 $(2, 0)$, 求离心率 e ;

(2) 若 $a = 4$, 且 Γ 上存在一点 P, 满足 $\overrightarrow{PA} = 2\overrightarrow{MP}$, 求 m ;

(3) 若 AM 中垂线 l 的斜率为 2, l 与 Γ 交于 C、D 两点, $\angle CMD$ 为钝角, 求 a 的取值范围.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析 (3) 见解析

【解析】(1) 由题意, $c = 2$, 故 $a = \sqrt{5+4} = 3$, 故 $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{3}$;

(2) 由题意, $A(4, 0)$ 不妨设 $P(x_P, y_P)$, 故 $\overrightarrow{MP} = (x_P, y_P - m)$, $\overrightarrow{PA} = (4 - x_P, -y_P)$,

由 $2\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{PA}$ 得, $\begin{cases} 2x_P = 4 - x_P \\ 2y_P - 2m = -y_P \end{cases}$, 即 $\begin{cases} x_P = \frac{4}{3} \\ y_P = \frac{2m}{3} \end{cases}$, 故 $P(\frac{4}{3}, \frac{2m}{3})$,

由 P 在椭圆上, 故 $\frac{(\frac{4}{3})^2}{16} + \frac{(\frac{2m}{3})^2}{5} = 1$, 解得 $m = \sqrt{10}$ (负根舍).

(3) 由题意, AM 斜率为 $-\frac{1}{2}$, 故 $|OA| = 2|OM| \Rightarrow a = 2m$,

不妨设 AM 中点为 $Q(\frac{m}{2}, \frac{m}{2})$, 设 $C(x_1, y_1)$, $D(x_2, y_2)$

则 l 方程为 $y = 2(x - m) + \frac{m}{2} = 2x - \frac{3}{2}m$,

$$\begin{cases} y = 2x - \frac{3}{2}m \\ \frac{x^2}{4m^2} + \frac{y^2}{5} = 1 \end{cases} \Rightarrow (16m^2 + 5)x^2 - 24m^3x + 9m^4 - 20m^2 = 0, \Delta > 0, \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{24m^3}{16m^2+5} \\ x_1x_2 = \frac{9m^4-20m^2}{16m^2+5} \end{cases}$$

故 $\overrightarrow{MC} = (x_1, y_1 - m) = (x_1, 2x_1 - \frac{5}{2}m)$, $\overrightarrow{MD} = (x_2, 2x_2 - \frac{5}{2}m)$,

由 $\angle CMD$ 为钝角,

故 $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = x_1x_2 + (2x_1 - \frac{5}{2}m) \cdot (2x_2 - \frac{5}{2}m) = 5x_1x_2 - 5m(x_1 + x_2) + \frac{25}{4}m^2 < 0$,

$$5 \cdot \frac{9m^4 - 20m^2}{16m^2 + 5} - 5m \cdot \frac{24m^3}{16m^2 + 5} + \frac{25}{4}m^2 = \frac{25m^4 - \frac{275}{4}m^2}{16m^2 + 5} < 0,$$

故 $m < \frac{\sqrt{11}}{2}$, 即 $a = 2m < \sqrt{11}$,

由 $a > \sqrt{5}$ 得, $a \in (\sqrt{5}, \sqrt{11})$.

21. 已知函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$. 对于正实数 a , 定义集合 $M_a = \{x \mid f(x+a) = f(x)\}$.

(1) 若 $f(x) = \sin x$, 判断 $\frac{\pi}{3}$ 是否是 M_π 中的元素, 并说明理由;

(2) 若 $f(x) = \begin{cases} x+2, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$, $M_a \neq \emptyset$, 求 a 的取值范围;

(3) 设 $y = f(x)$ 是偶函数, 当 $x \in (0, 1]$ 时, $f(x) = 1 - x$, 且对任意 $a \in (0, 2)$, 均有 $M_a \subseteq M_2$. 写出 $y = f(x)$, $x \in (1, 2)$ 的解析式, 并证明: 对任意实数 c , 函数 $y = f(x) - c$ 在 $[-3, 3]$ 上至多有 9 个零点.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析 (3) 见解析

【解析】(1) 由题意, $M_\pi = \{x \mid f(x+\pi) = f(x), x \in \mathbf{R}\}$, 当 $x = \frac{\pi}{3}$ 时,

$$f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \neq f\left(\frac{4\pi}{3}\right), \text{故 } \frac{\pi}{3} \text{ 不属于 } M_\pi.$$

(2) 当 $x \geq 0$ 时, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$, 此时 $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$,

故 $y = x + b$ 与 $y = \sqrt{x}$ 相切于 $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$, 令 $x + 2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$, 此时 $a_{\min} = \frac{7}{4}$.

当 $f(x) = 0$ 时, $x_1 = -2, x_2 = 0$, 当 $f(x) = 2$ 时, $x = 4$, 故 $a_{\max} = 4$,

综上, $a \in \left[\frac{7}{4}, 4\right)$.

(3) 由题意, 当 $a \in (0, 2)$ 时, 若 $f(x+a) = f(x)$, 则必有 $f(x+2) = f(x)$,

由 $f(x)$ 为偶函数, 故当 $x \in (-1, 0)$ 时, 易得 $f(x) = x + 1$,

任取 $x_0 \in (-1, 0)$, 则必有 $-x_0 \in (0, 1)$ 使 $f(-x_0) = f(x_0)$,

即满足 $a \in (0, 2)$ 时, 任意的 $x_0 \in (-1, 0)$ 皆满足 $f(x+a) = f(x)$,

即任意的 $x_0 \in (-1, 0)$, $f(x+2) = f(x)$,

故 $x \in (1, 2)$ 时, 易得 $f(x) = x - 1$;

同理可得当 $x \in (2, 3]$ 时, $f(x) = -x + 3$,

由 $f(x)$ 为偶函数, 易得 $x \in [-3, -2]$ 时, $f(x) = x + 3$, $x \in (-2, -1]$ 时, $f(x) = -x - 1$,

由 $f(-2), f(0), f(2)$ 仅有 $f(-2) = f(2)$ 的限制, 函数值可任取,

故当 $c \in (0, 1)$ 时, $y = f(x) - c$ 在 $[-3, 3]$ 内可最多取 $6 + 3 = 9$ 个零点,

故对任意的实数 c , 函数 $y = f(x) - c$ 在 $[-3, 3]$ 上至多有 9 个零点.