2025年普通高等学校招生全国统一考试(上海卷)

数学

★祝大家学习生活愉快★

注意事项：

1. 答卷前，考生务必用黑色字迹的钢笔或签字笔将自己的姓名和考生号，试室号，座位号填写在答题卡上。用$2B$铅笔将试卷类型和考生号填涂在答题卡相应位置上。

2. 选择题每小题选出答案后，用$2B$铅笔把答题卡上对应的题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再填涂其他答案。答案不能答在试卷上。

3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案，不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效。

一、填空题(本大题共12题，第1～6题每题4分，第7～12题每题5分，共54分。考生应在答题纸的相应位置直接填写结果。)

1. 已知全集$U=\{x|2\leqslant x\leqslant 5,x\in\mathbf{R}\}$，集合$A=\{x|2\leqslant x<4,x\in\mathbf{R}\}$，则$\overline{A}=$______.

2. 不等式$\dfrac{x-1}{x-3}<0$的解集为______.

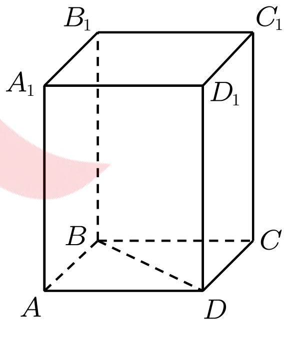
3. 已知等差数列$\{a_n\}$的首项$a_1=-3$，公差$d=2$，则该数列的前6项和为______.

4. 在二项式$(2x-1)^5$的展开式中，x^3的系数为______.

5. 函数$y=\cos x$在$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{4}\right]$到的值域为______.

6. 已知随机变量X的分布为$\begin{pmatrix}5 & 6 & 7\\ 0.2 & 0.3 & 0.5\end{pmatrix}$，则期望$E[X]=$______.

7. 如图，在正四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$BD=4\sqrt{2}$，$DB_1=9$，则该正四棱柱的体积为______.

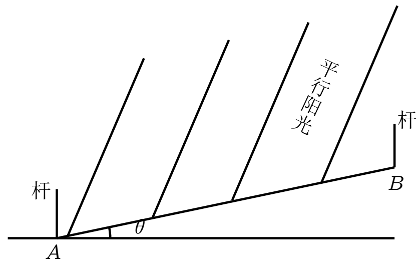


8. 设$a,b>0$，$a+\dfrac{1}{b}=1$，则$b+\dfrac{1}{a}$的最小值为______.

9. 4个家长和2个儿童去爬山．6个人需要排成一条队列，要求队列的头和尾均是家长，则不同的排列个数有______种.

10. 已知复数z满足$z^2=(\overline{z})^2$，$|z|\leqslant 1$，则$|z-2-3i|$的最小值是______.

11. 小申同学观察发现，生活中有些时候影子可以完全投射在斜面上．某斜面上有两根长为1米的垂直于水平面放置的杆子，与斜面的接触点分别为A,B，它们在阳光的照射下呈现出影子，阳光可视为平行光：其中一根杆子的影子在水平面上，长度为0.4米；另一根杆子的影子完全在斜面上，长度为0.45米．则斜面的底角$\theta=$______(结果用角弧度制表示，精确到0.01°)



12. 已知函数$f(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$，$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$是平面内三个不同的单位向量．若$f(\vec{a}\cdot\vec{b})+f(\vec{b}\cdot\vec{c})+f(\vec{c}\cdot\vec{a})=0$，则$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|$的取值范围是______．

二、选择题（本大题共4题，第13、14题每题4分，第15、16题每题5分，共18分。每题有且仅有一个正确选项）

13. 已知事件A、B相互独立，事件A发生的概率为$P(A)=\dfrac{1}{2}$，事件B发生的概率为$P(B)=\dfrac{1}{2}$，则事件$A\cap B$发生的概率$P(A\cap B)$为　　（　　）

A. $\dfrac{1}{8}$.　　B. $\dfrac{1}{4}$.　　C. $\dfrac{1}{2}$.　　D. 0

14. 设$a>0$,$s\in\mathbf{R}$．下列各项中，能推出$a^s>a$的一项是　　（　　）

A. $a>1$，且$s>0$.　　B. $a>1$，且$s<0$.

C. $0<a<1$，且$s>0$.　　D. $0<a<1$，且$s<0$

15. 已知$A(0,1)$,$B(1,2)$,C在Γ:$x^2-y^2=1(x\geqslant1,y\geqslant0)$上，则$\Delta ABC$的面积　　（　　）

A. 有最大值，但没有最小值.　　B. 没有最大值，但有最小值.

C. 既有最大值，也有最小值.　　D. 既没有最大值，也没有最小值

16. 设$\lambda=[0,1]$，数列$a_n=10n-9$，数列$b_n=2^n$．设$c_n=\lambda a_n+(1-\lambda)b_n$．若对任意$\lambda\in[0,1]$，长为$a_n$、$b_n$、$c_n$的线段均能构成三角形，则满足条件的$n$有　　（　　）

A. 1个.　　B. 3个.　　C. 4个.　　D. 无穷

三、解答题：解答题（本大题共5题，第17一19题每题14分，第20一21题每题18分，共78分。）

17.（第1小题满分6分，第2小题满分8分）

2024年东京奥运会，中国获得了男子4×100米混合泳接力金牌．以下是历届奥运会男子4×100米混合泳接力项目冠军成绩记录（单位：秒），数据按照升序排列：206.78、207.46、207.95、209.34、209.35、210.68、213.73、214.84、216.93、216.93

（1）求这组数据的极差与中位数；

（2）从这10个数据中任选3个，求恰有2个数据在211以上的概率；

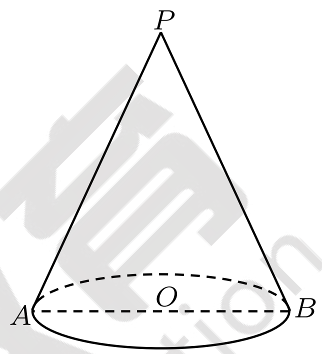
（3）若比赛成绩y关于年份x的回归方程为$y=-0.311x+\hat{b}$，年份x的平均数为2006，预测2028年冠军队的成绩（精确到0.01秒）.

18.（第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分）

如图，P 是圆锥的顶点，O 是底面圆心，AB 是底面直径，且 $AB=2$.

（1）若直线 PA 与圆锥底面的所成角为 $\dfrac{\pi}{3}$，求圆锥的侧面积；

（2）已知 Q 是母线 PA 的中点，点 C、D 在底面圆周上，且弧的长为 $\dfrac{\pi}{3}$，$CD/\!/AB$. 设点 M 在线段 OC 上，证明：直线 $QM/\!/$ 平面 PBD.



19.（第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分）

已知 $f(x)=x^2-(m+2)x+m\ln x, m\in\mathrm{R}$.

（1）若 $f(1)=0$，求不等式 $f(x)\leqslant x^2-1$ 的解集；

（2）若函数 $y=f(x)$ 满足在 $(0,+\infty)$ 上存在极大值，求 m 的取值范围；

20.（第1小题满分4分，第2小题满分6分，第3小题满分8分）

已知椭圆Γ:$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{5}=1(a>\sqrt{5})$,$M(0,m)$ $(m>0)$,A是Γ的右顶点.

(1)若Γ的焦点是$(2,0)$,求离心率e;

(2)若$a=4$,且Γ上存在一点P,满足$\overrightarrow{PA}=2\overrightarrow{MP}$,求$m$;

(3)若AM中垂线l的斜率为2,l与Γ交于C、D两点,$\angle CMD$为钝角,求a的取值范围.

21.（第1小题满分4分，第2小题满分6分，第3小题满分8分）

已知函数$y=f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$. 对于正实数a,定义集合$M_a=\{x|f(x+a)=f(x)\}$.

(1)若$f(x)=\sin x$,判断$\dfrac{\pi}{3}$是否是M_π中的元素,并说明理由;

(2)若$f(x)=\begin{cases}x+2 & x<0\\ \sqrt{x} & x\geqslant 0\end{cases}$,$M_a\neq\varnothing$,求$a$的取值范围;

(3)设$y=f(x)$是偶函数,当$x\in(0,1]$时,$f(x)=1-x$,且对任意$a\in(0,2)$,均有$M_a\subseteq M_2$. 写出$y=f(x)$,$x\in(1,2)$的解析式,并证明:对任意实数c,函数$y=f(x)-c$在$[-3,3]$上至多有9个零点.