成都七中高 2025届高三热身试卷参考答案

一、单选题

1	2	3	4	5	6	7	8
B	C	A	C	A	D	D	B

二、多选题

9	10	11
BC	ACD	ABD

三、填空题

12．80　　13．$\frac{1}{5}$　　14．$\frac{1}{5}$　$\frac{3}{7}$

三、解答题

15．解：（1）因为$b\cos A+a\cos B=2c\cos A$

所以$\sin B\cos A+\sin A\cos B=2\sin C\cos A$，

所以$\sin\left(A+B\right)=2\sin C\cos A$，

因为$A+B=\pi-C$，所以$\sin C=2\sin C\cos A$，

因为$\sin C\neq 0$，所以$\cos A=\frac{1}{2}$.

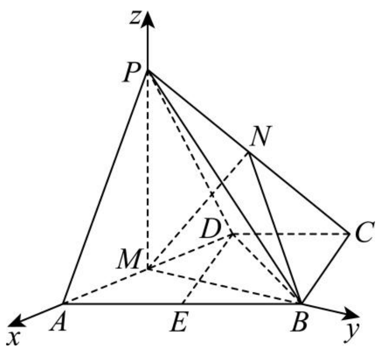
因为$0<A<\pi$，所以$A=\frac{\pi}{3}$。................................6 分

（2）因为$A=\frac{\pi}{3}$，$\triangle ABC$的面积为$\sqrt{3}$，所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，解得$bc=4$，

由余弦定理$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，得$4=b^2+c^2-bc=\left(b+c\right)^2-3bc$，

所以$b+c=4$，所以$a+b+c=6$．所以$\triangle ABC$的周长为6．...........13 分

16．（本小题满分 15 分）



解：（1）∵ $PA=PD$，M 是 AD 的中点，∴ $PM\perp AD$，

又∵平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$ 且交于 AD，$PM\subset$平面 PAD，

∴ $PM\perp$平面 $ABCD$，

又 $BD\subset$平面 $ABCD$，∴ $PM\perp BD$ ....5 分

（2）取 AB 的中点 E，∵ $PA=AD=AB=2CD=2$，

∴ $PM=\sqrt{3}$，$BE=CD=1$，且 $CD/\!/BE$，$BC\perp BE$，

$\therefore$四边形$BCDE$是矩形，$\therefore DE\perp AB$，

因此$\triangle ABD$是正三角形，$\therefore BM\perp AD$，$BM=\sqrt{3}$，$BC=\sqrt{3}$ ....8 分

如图所示，建立空间直角坐标系

$M(0,0,0)$，$B\left(0,\sqrt{3},0\right)$，$C\left(-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，$P\left(0,0,\sqrt{3}\right)$，$N\left(-\frac{3}{4},\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

$\therefore \overrightarrow{MN}=\left(-\frac{3}{4},\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{PB}=\left(0,\sqrt{3},-\sqrt{3}\right)$，$\overrightarrow{PC}=\left(-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},-\sqrt{3}\right)$，

设平面PBC的法向量$\vec{n}=(x,y,z)$，则有$\begin{cases}\sqrt{3}y-\sqrt{3}z=0\\-\frac{3}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y-\sqrt{3}z=0\end{cases}$，

令$y=\sqrt{3}$，则$z=\sqrt{3}$，$x=-1$，故$\vec{n}=\left(-1,\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$为平面$PBC$的一个法向量.

由$$\left|\cos\left\langle\overrightarrow{MN},\vec{n}\right\rangle\right|=\frac{\left|\overrightarrow{MN}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|\left|\vec{n}\right|}=\frac{\left(-\frac{3}{4}\right)\times(-1)+\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}+\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}}=\frac{\sqrt{42}}{7}$$

所以直线MN与平面PBC所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{42}}{7}$...............................15 分

17.（本小题满分 **15** 分）

解：（1）若一次性购买5个甲系列盲盒，得到玩偶的情况总数为243，集齐A_1，A_2，A_3玩偶，则有两种情况：

①其中一个玩偶3个，其他两个玩偶各1个，则有$C_3^1C_5^3A_2^2$种结果；

②若其中两个玩偶各2个，另外两个玩偶 1 个，则共有$C_3^1C_5^1C_4^2$种结果，

故$P(E_5)=\frac{C_3^1C_5^3A_2^2+C_3^1C_5^1C_4^2}{3^5}=\frac{60+90}{243}=\frac{150}{243}=\frac{50}{81}$； ....3 分

若一次性购买4个乙系列盲盒，全部为B_1与全部为B_2的概率相等，均为$\frac{1}{2^4}$，

故$P(F_4)=1-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^4}=\frac{7}{8}$； ....5 分

（2）（i）由题可知：$Q_1=\frac{2}{3}$，

当$n\geq 2$时，$Q_n=\frac{1}{4}Q_{n-1}+\frac{1}{2}\left(1-Q_{n-1}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}Q_{n-1}$，则$Q_n-\frac{2}{5}=-\frac{1}{4}\left(Q_{n-1}-\frac{2}{5}\right)$，$Q_1-\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$，即

$\left\{Q_n-\frac{2}{5}\right\}$是以$\frac{4}{15}$为首项，以$-\frac{1}{4}$为公比的等比数列.

所以$Q_n-\frac{2}{5}=\frac{4}{15}\times\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$，即$Q_n=\frac{2}{5}+\frac{4}{15}\times\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$；..............................10 分

(ii)因为每天购买盲盒的100人都已购买过很多次，所以对于每一个人来说，某一天来购买盲盒时，可看作$n\to+\infty$，所以，其购买甲系列的概率近似于$\frac{2}{5}$，

假设用ξ表示一天中购买甲系列盲盒的人数，则$\xi\sim B\left(100,\frac{2}{5}\right)$，

所以$E\xi=100\times\frac{2}{5}=40$，即购买甲系列的人数的期望为40，

所以礼品店应准备甲系列盲盒40个，乙系列盲盒60个...............................15 分

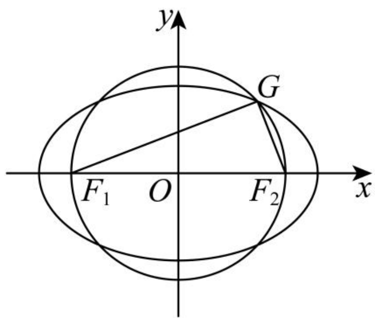
18.（本小题满分 17 分）

解：（1）由题意知$\angle F_1GF_2=90^\circ$，则$S_{\triangle GF_1F_2}=\frac{1}{2}|GF_1||GF_2|=1\Rightarrow|GF_1||GF_2|=2$，

又$|GF_1|^2+|GF_2|^2=|F_1F_2|^2=4c^2$，$(|GF_1|+|GF_2|)^2-2|GF_1||GF_2|=4c^2\Rightarrow 4a^2-4=4c^2\Rightarrow a^2-c^2=1$，

又$r_{内}=\frac{2S_{\triangle GF_1F_2}}{2a+2c}=2-\sqrt{3}\Rightarrow a+c=2+\sqrt{3}$，$a-c=2-\sqrt{3}$，解得$a=2$，$c=\sqrt{3}$，$b=1$，

所以椭圆C的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$...............................4 分



（2）设直线l的方程为$y-1=k(x-2)$，其中$k>\frac{1}{4}$，且$k\neq1$，即

$y=kx-2k+1$，

设直线l与椭圆C交于点$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

联立方程组$\begin{cases}y=kx-2k+1,\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$整理得

$(4k^2+1)x^2-(16k^2-8k)x+16k^2-16k=0$，

$\Delta=(16k^2-8k)^2-4(4k^2+1)(16k^2-16k)>0$，

所以$x_1+x_2=\frac{16k^2-8k}{4k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{16k^2-16k}{4k^2+1}$，................6 分

（i）$\because k_1k_2=\lambda(k_1+k_2)$，$\therefore\frac{1}{\lambda}=\frac{k_1+k_2}{k_1k_2}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}$

$\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}=\frac{x_1}{y_1-1}+\frac{x_2}{y_2-1}=\frac{x_1}{k(x_1-2)}+\frac{x_2}{k(x_2-2)}=\frac{1}{k}\left(\frac{x_1}{x_1-2}+\frac{x_2}{x_2-2}\right)$

$$=\frac{2}{k}\cdot\frac{x_1x_2-(x_1+x_2)}{(x_1-2)(x_2-2)}=\frac{2}{k}\cdot\frac{x_1x_2-(x_1+x_2)}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}$$

$$=\frac{2}{k}\cdot\frac{\frac{16k^2-16k}{4k^2+1}-\frac{16k^2-8k}{4k^2+1}}{\frac{16k^2-16k}{4k^2+1}-2\times\frac{16k^2-8k}{4k^2+1}+4}=\frac{2}{k}\cdot\frac{\frac{-8k}{4k^2+1}}{\frac{4}{4k^2+1}}=-4$$ 即 $\frac{1}{\lambda}=-4$，$\lambda=-\frac{1}{4}$................11 分

（ii）法一：直线 BM 的方程为 $y=k_1x+1$，令 $y=0$，得 $x=-\frac{1}{k_1}$，故 $T\left(-\frac{1}{k_1},0\right)$，

设直线 BN 与 x 轴交于点 Q，直线 BN 的方程为 $y=k_2x+1$，令 $y=0$，得 $x=-\frac{1}{k_2}$，故 $Q\left(-\frac{1}{k_2},0\right)$

联立方程组 $\begin{cases}y=k_2x+1,\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$ 整理得 $\left(4k_2^2+1\right)x^2+8k_2x=0$，

解得 $x_2=-\frac{8k_2}{4k_2^2+1}$ 或 0（舍），$y_2=k_2x_2+1=k_2\cdot\left(-\frac{8k_2}{4k_2^2+1}\right)+1=-\frac{8k_2^2}{4k_2^2+1}+1$,

所以 $\triangle BNT$ 的面积

$$S=\frac{1}{2}|QT||y_B-y_2|=\frac{1}{2}\left|-\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}\right|\left|1-\left(-\frac{8k_2^2}{4k_2^2+1}+1\right)\right|=\left|-\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}\right|\cdot\frac{4k_2^2}{4k_2^2+1},$$

由（i）可知，$\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}=-4$，故 $-\frac{1}{k_1}=4+\frac{1}{k_2}$，代入上式，

所以 $S=\left|4+\frac{2}{k_2}\right|\cdot\frac{4k_2^2}{4k_2^2+1}=\left|2+\frac{1}{k_2}\right|\cdot\frac{8k_2^2}{4k_2^2+1}$，

因为点 N 在 x 轴下方且不在 y 轴上，故 $k_2<-\frac{1}{2}$ 或 $k_2>\frac{1}{2}$，得 $2+\frac{1}{k_2}>0$，

所以 $S=\left(2+\frac{1}{k_2}\right)\cdot\frac{8k_2^2}{4k_2^2+1}=\frac{8k_2\left(2k_2+1\right)}{4k_2^2+1}=4\cdot\frac{4k_2^2+2k_2}{4k_2^2+1}=4\left(1+\frac{2k_2-1}{4k_2^2+1}\right)$，

显然，当 $k_2<-\frac{1}{2}$ 时，$S=4\left(1+\frac{2k_2-1}{4k_2^2+1}\right)<4$，当 $k_2>\frac{1}{2}$ 时，$S=4\left(1+\frac{2k_2-1}{4k_2^2+1}\right)>4$，

故只需考虑 $k_2>\frac{1}{2}$，令 $t=2k_2-1$，则 $t>0$，

所以 $S=4\left[1+\frac{t}{(t+1)^2+1}\right]=4\left(1+\frac{1}{t+\frac{2}{t}+2}\right)\le 4\left(1+\frac{1}{2\sqrt{t\cdot\frac{2}{t}}+2}\right)=2\sqrt{2}+2$，

当且仅当 $t=\frac{2}{t}$，$t=\sqrt{2}$，即 $k_2=\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ 时，不等式取等号，

所以$\triangle BNT$的面积的最大值为$2\sqrt{2}+2$． ....17 分

法二：直线BM的方程为$y=k_1x+1$，令$y=0$，得$x=-\frac{1}{k_1}$，故$T\left(-\frac{1}{k_1},0\right)$，设直线$BN$与$x$轴交于点$Q$，直线$BN$的方程为$y=k_2x+1$，令$y=0$，得$x=-\frac{1}{k_2}$，故$Q\left(-\frac{1}{k_2},0\right)$，

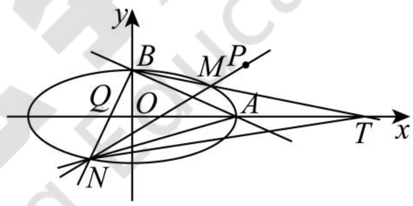
由（i）可知，$\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}=-4$，故$-\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k_2}=4$，所以点$A(2,0)$是线段$TQ$的中点，

故$\triangle BNT$的面积$S=2S_{\triangle BAN}=2\times\frac{1}{2}|AB|\times d=\sqrt{5}d$，

其中d为点N到直线AB的距离，

显然，当过点N且与直线AB平行的直线l'与椭圆C相切时，d取最大值，

设直线l'的方程为$y=-\frac{1}{2}x+m(m<0)$，即$x+2y-2m=0$，



联立方程组$\begin{cases}y=-\frac{1}{2}x+m,\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$整理得$x^2-2mx+2m^2-2=0$，

据$\Delta=(-2m)^2-4(2m^2-2)=0$，解得$m=-\sqrt{2}$（正舍），

所以平行直线$l':x+2y+2\sqrt{2}=0$与直线$l:x+2y-2=0$之间的距离为

$\frac{|2\sqrt{2}-(-2)|}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{2}+2}{\sqrt{5}}$，即$d$的最大值为$\frac{2\sqrt{2}+2}{\sqrt{5}}$，

所以$\triangle BNT$的面积的最大值为$\sqrt{5}\times\frac{2\sqrt{2}+2}{\sqrt{5}}=2\sqrt{2}+2$． ....17 分

19.（本小题满分 17 分）

解：（1）依题意，$a_{n+1}=f(a_n)=a_n+A\sin(\frac{\pi}{2}a_n)$，而$a_1=1$，则$a_2=a_1+A=1+A$，

$a_3=a_2+A\sin\frac{(1+A)\pi}{2}$，要使数列$\{a_n\}$为等差数列，则$a_3-a_2=a_2-a_1$，即公差

$d=A\sin\frac{(1+A)\pi}{2}=A$，

而$A>0$，则$\sin\frac{(1+A)\pi}{2}=1$，于是$\frac{(1+A)\pi}{2}=2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathrm{N}^*$，解得$A=4k,k\in\mathrm{N}^*$，

显然$a_n=a_1+(n-1)d=4k(n-1)+1,k\in\mathrm{N}^*$，此时$A\sin(\frac{\pi}{2}a_n)=A\sin[2k\pi(n-1)+\frac{\pi}{2}]=A\sin\frac{\pi}{2}=A$，

即对 $\forall n\in N^*$，恒有 $a_{n+1}-a_n=A$，因此数列 $\{a_n\}$ 是以 $A=4k,k\in N^*$ 为公差的等差数列，

所以当 $k=1$ 时，$A_{\min}=4$ ....4 分

（2）要证 $f(x)<xe^x+\frac{1}{e}$，只需证 $ex-\ln x<e^x+\frac{1}{ex}$，即 $ex-e^x<\ln x+\frac{1}{ex}$.

令 $h(x)=\ln x+\frac{1}{ex}(x>0)$，则 $h'(x)=\frac{ex-1}{ex^2}$，

易知 $h(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ 上单调递增，则 $h(x)_{\min}=h\left(\frac{1}{e}\right)=0$，所以 $\ln x+\frac{1}{ex}\geq 0$.

再令 $\varphi(x)=ex-e^x$，则 $\varphi'(x)=e-e^x$，易知 $\varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，则 $\varphi(x)_{\max}=\varphi(1)=0$，所以 $ex-e^x\leq 0$.

因为 $h(x)$ 与 $\varphi(x)$ 不同时为 0，所以 $ex-e^x<\ln x+\frac{1}{ex}$，故原不等式成立............10 分

（3）$a_{n+1}=f(a_n)=\ln a_n+a_n+2$，而 $a_1=1$，则 $a_2=3$，

$a_3=\ln a_2+a_2+2=5+\ln 3>6$，显然 $a_3>a_2=3>a_1$，又函数 $f(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的增函数，则可递推得 $a_{n+1}>a_n$，

当 $n\geq 2$ 时，$\ln a_n\geq \ln a_2=\ln 3>1$，于是 $a_{n+1}-a_n=\ln a_n+2>3$，

当 $n\geq 3$ 时，$a_n=a_2+(a_3-a_2)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_n-a_{n-1})>3+3(n-2)=3(n-1)$，

而 $a_2=3(2-1)$，即 $\forall n\in N^*,n\geq 2$，恒有 $a_n\geq 3(n-1)$，

因为当 $x>1$ 时，$\ln x<x-1$，则当 $x>0$ 时，$\ln(x+1)<x$，

当 $n\geq 2$ 时，$(3n-2)^2>(3n-1)(3n-4)$，

$$\ln[1+\frac{4}{(a_n+1)^2}]<\frac{4}{(a_n+1)^2}\leq\frac{4}{(3n-2)^2}<\frac{4}{(3n-1)(3n-4)}=\frac{4}{3}(\frac{1}{3n-4}-\frac{1}{3n-1}),$$

$$\ln[1+\frac{4}{(a_2+1)^2}]+\ln[1+\frac{4}{(a_3+1)^2}]+\cdots+\ln[1+\frac{4}{(a_n+1)^2}]<\frac{4}{(a_2+1)^2}+\frac{4}{(a_3+1)^2}+\cdots+\frac{4}{(a_4+1)^2}$$

$$<\frac{4}{3}[(\frac{1}{2}-\frac{1}{5})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{8})+(\frac{1}{8}-\frac{1}{11})+\cdots+(\frac{1}{3n-4}-\frac{1}{3n-1})]=\frac{4}{3}(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n-1})<\frac{2}{3}<1,$$

于是 $\ln\{[1+\frac{4}{(a_2+1)^2}]\cdot[1+\frac{4}{(a_3+1)^2}]\cdots\cdot[1+\frac{4}{(a_n+1)^2}]\}<1$,

所以 $[1+\frac{4}{(a_2+1)^2}]\cdot[1+\frac{4}{(a_3+1)^2}]\cdot\cdots[1+\frac{4}{(a_n+1)^2}]<e$ ....17 分