

宜宾市普通高中 2022 级第三次诊断性测试

数学参考答案及评分意见

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
选项	C	B	D	A	C	B	D	C	BD	ACD	ABC

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分

12. $\sqrt{e}$

13. 3 或 $-\frac{3}{2}$

14. $\frac{2}{3}$

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

15. (13 分)

解：(1) 因为 $a\cos C + \sqrt{3}a\sin C - b - c = 0$ 所以 $\sqrt{3}a\sin C - c = b - a\cos C = c\cos A$ 即 $\sqrt{3}c\sin A - c = c\cos A$ ，于是 $\sqrt{3}\sin A - \cos A = 1$ 即 $\sin(A - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ ，又 $A \in (0, \pi)$ 所以 $A = \frac{\pi}{3}$ 7 分(2) 因为 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{\sqrt{3}}{4}c = \sqrt{3}$ 所以 $c = 4$ ，又因为 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = 17 - 4 = 13$ 所以 $a = \sqrt{13}$ 13 分

16. (15 分)

解：(1) 由题可得， 2×2 列联表如下：

抗 体	指标值		合 计
	小于 60	不小于 60	
有抗体	25	125	150
没有抗体	20	30	50
合计	45	155	200

假设为 H_0 ：注射疫苗后小白鼠产生抗体与指标值不小于 60 无关联。根据列联表中的数据，得： $\chi^2 = \frac{200 \times (25 \times 30 - 20 \times 125)^2}{45 \times 155 \times 50 \times 150} \approx 11.708 > 10.828 = \chi_{0.001}$

..... 6 分

根据 $\alpha = 0.001$ 的独立性检验，推断 H_0 不成立，即认为注射疫苗后小白鼠产生抗体与指标值

不小于 60 有关，此推断犯错误的概率不大于 0.001..... 7 分

(2) 由题知每只小白鼠在注射疫苗后产生抗体的概率的估计值为 $\frac{3}{4}$

所以随机变量 $X \sim B(100, \frac{3}{4})$

所以 $P(X=k) = C_{100}^k \times (\frac{3}{4})^k \times (\frac{1}{4})^{100-k}$ ($k=0,1,2, \dots, 100$)，要使 $P(X=k)$ 最大，则

$$\begin{cases} C_{100}^k \times (\frac{3}{4})^k \times (\frac{1}{4})^{100-k} \geq C_{100}^{k-1} \times (\frac{3}{4})^{k-1} \times (\frac{1}{4})^{101-k} \\ C_{100}^k \times (\frac{3}{4})^k \times (\frac{1}{4})^{100-k} \geq C_{100}^{k+1} \times (\frac{3}{4})^{k+1} \times (\frac{1}{4})^{99-k} \end{cases}$$

解得： $\frac{299}{4} \leq k \leq \frac{303}{4}$ ($k \in \mathbf{N}$)，所以 $k=75$ 15 分

17. (15 分)

(1) 证明：因为 $CC_1 \perp$ 平面 ABC ， $AB \subset$ 平面 ABC

所以 $CC_1 \perp AB$ ，又因为 $AB \perp BC_1$ ， $CC_1 \cap BC_1 = C_1$

所以 $AB \perp$ 平面 BCC_1B_1 ，又因为 $AB \subset$ 平面 ABB_1A_1

所以平面 $ABB_1A_1 \perp$ 平面 BCC_1B_1 5 分

(2) 解：在三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $A_1B_1 = B_1C_1 = 1$ ， $AB = BC = 2$ ， D ， E 分别是棱 AC ， BC 的中点，所以 $DE \parallel A_1B_1$ 且相等， $BC \parallel B_1C_1$ 且相等

所以 A_1 ， B_1 ， E ， D 四点共面

由 (1) 知 $AB \perp$ 平面 BCC_1B_1 ，所以 $AB \perp BC$ ， $DE \perp$ 平面 BCC_1B_1

所以 $DE \perp B_1E$ ， $DE \perp C_1E$

所以 $\angle B_1EC_1$ 为所求角

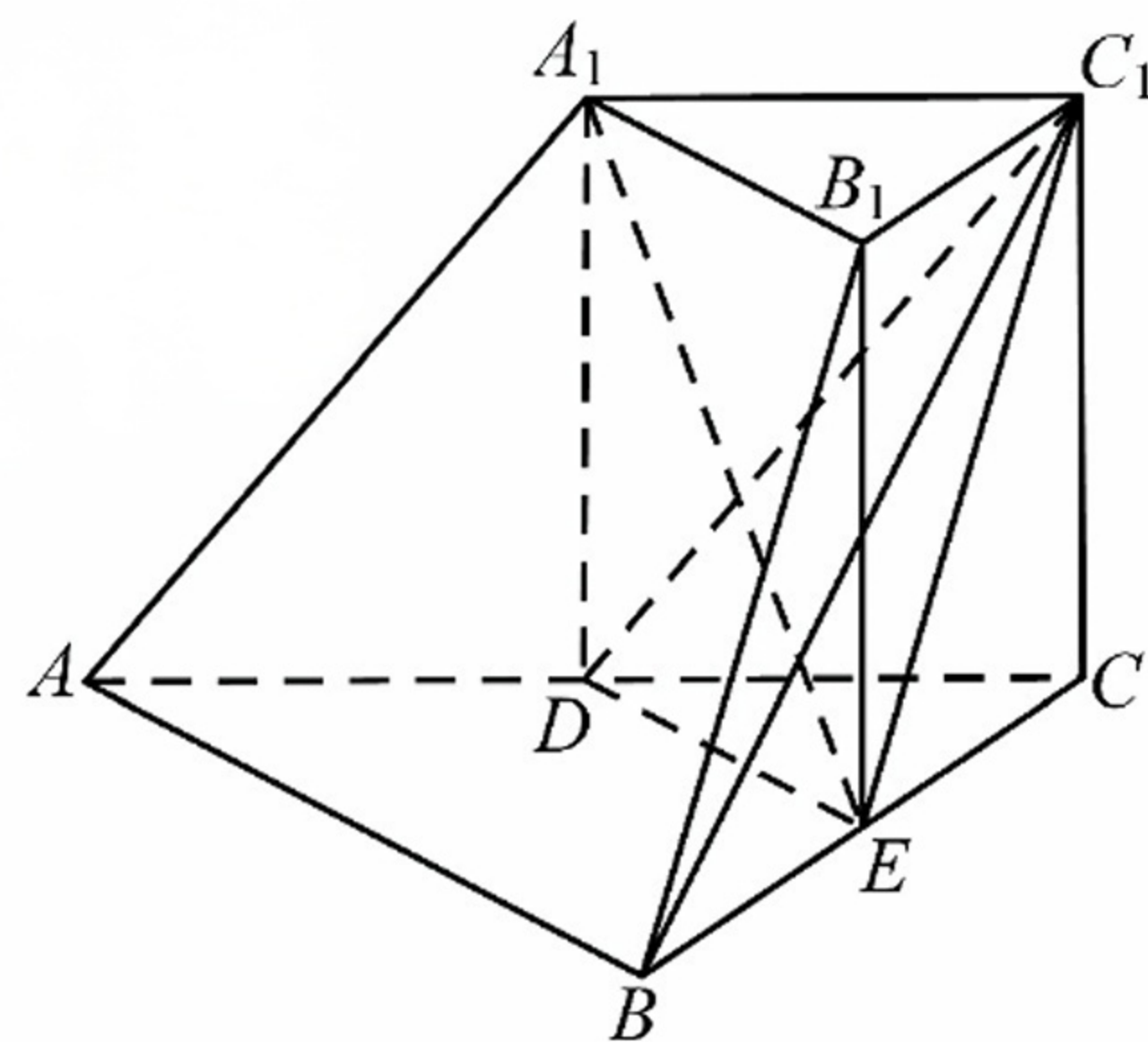
设 $CC_1 = a$ ($a > 0$)，点 B 到平面 DEC_1 的距离为 h

由 $V_{B-DEC_1} = V_{C_1-BDE}$ 可得：

$$h = \frac{a \times S_{\triangle BDE}}{S_{\triangle DEC_1}} = \frac{a \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1}{\frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{a^2 + 1}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

$$\text{所以 } \frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{h}{BC_1} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1} \cdot \sqrt{a^2 + 4}}$$

所以 $a=1$ 或 $a=2$



又因为 $V_{ABC-A_1B_1C_1} = \frac{1}{3} \times (S_{\triangle ABC} + S_{\triangle A_1B_1C_1} + \sqrt{S_{\triangle ABC} \times S_{\triangle A_1B_1C_1}}) \times CC_1 = \frac{7}{6}a > 2$

所以 $a > \frac{12}{7}$ ，所以 $a = 2$

所以在 $Rt\triangle B_1C_1E$ 中， $\cos \angle B_1EC_1 = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

所以平面 DEC_1 与平面 A_1B_1E 所成角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 。……15 分

18. (17 分)

解：(1) 当 $a = -1$ 时， $f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x) - x^3 - 2x$ ($-1 < x < 1$)

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} - 3x^2 - 2 = \frac{2 - (3x^2 + 2)(1 - x^2)}{1 - x^2} = \frac{x^2(3x^2 - 1)}{1 - x^2} \quad (-1 < x < 1)$$

因为当 $x \in (-1, -\frac{\sqrt{3}}{3}) \cup (\frac{\sqrt{3}}{3}, 1)$ 时， $f'(x) > 0$ ；当 $x \in (-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ 时， $f'(x) \leq 0$ ，

所以，增区间： $(-1, -\frac{\sqrt{3}}{3})$ ， $(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1)$ ；减区间： $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ ……6 分

$$(2) f'(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} + 3ax^2 - 2 = \frac{x^2}{1-x^2} [-3ax^2 + (3a+2)] \quad x \in (0, 1)$$

分类：①当 $a = 0$ 时， $f'(x) > 0$ ，所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 单增，所以， $f(x) > f(0) = 0$ 成立；

②当 $a > 0$ 时，由 $f'(x) = 0$ 可得 $x = \sqrt{1 + \frac{2}{3a}} > 1$ ，则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 单增，所以， $f(x) > f(0) = 0$ 成立；

③当 $a < 0$ 时，若 $3a + 2 \geq 0$ 即 $-\frac{2}{3} \leq a < 0$ 时，则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 单增，所以， $f(x) > f(0) = 0$ 成立；若 $3a + 2 < 0$ 即 $a < -\frac{2}{3}$ 时，则 $f(x)$ 在 $(0, \sqrt{1 + \frac{2}{3a}})$ 单减，所以，对任意 $x \in (0, \sqrt{1 + \frac{2}{3a}})$ 时 $f(x) < f(0) = 0$ 不成立；

综上所述： a 的取值范围是 $[-\frac{2}{3}, +\infty)$ ……14 分

(3) $f(x)$ 的“好”点为 $P(0, 0)$ ……17 分

其理由陈述如下，仅供参考，学生不作要求

设 $P(x_0, f(x_0))$ 为 $f(x)$ 的“好”点，即对任意 $x \in (-1, 1)$ ，都有 $(x - x_0)[f(x) - g(x)] \geq 0$ ，

当 $x = x_0$ 时，成立；

当 $x \neq x_0$ 时，需满足：当 $x > x_0$ 时， $f(x) - g(x) \geq 0$ ；当 $x < x_0$ 时， $f(x) - g(x) \leq 0$ 成立。

因为 $f(x)$ 在 P 处的切线方程为 $g(x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ ，所以 $g(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$ 。

设 $h(x) = f(x) - g(x)$ ，即 $h(x) = f(x) - f'(x_0) \cdot (x - x_0) - f(x_0)$ ，则 $h'(x) = f'(x) - f'(x_0)$ 。

因为 $f'(x) = \frac{2x^4}{1-x^2}$ 在 $(-1, 0)$ 递减，在 $(0, 1)$ 递增，于是分类讨论：

①当 $x > x_0$ 时，因为 P 为“好”点，所以此时 $h(x) = f(x) - g(x) \geq 0$ 成立。

(i) 若 $0 \leq x_0 < 1$ ，由于 $f'(x)$ 在 $x \in (x_0, 1)$ 递增，所以 $f'(x) > f'(x_0)$

则 $h'(x) = f'(x) - f'(x_0) > 0$ ，所以 $h(x)$ 在 $x \in (x_0, 1)$ 递增，

即 $h(x) > h(x_0) = f(x_0) - g(x_0) = 0$ ，满足条件，则 $0 \leq x_0 < 1$ 成立。

(ii) 若 $-1 < x_0 < 0$ ，当 $x \in (x_0, 0)$ 时， $f'(x) < f'(x_0)$ ，即 $h'(x) = f'(x) - f'(x_0) < 0$ ，

所以 $h(x)$ 在 $(x_0, 0)$ 递减，此时 $h(x) < h(x_0) = f(x_0) - g(x_0) = 0$ ，矛盾，不满足条件。

②当 $x < x_0$ 时，因为 P 为“好”点，所以此时 $h(x) = f(x) - g(x) \leq 0$ 成立。

(i) 若 $-1 < x_0 \leq 0$ ，由于 $f'(x)$ 在 $x \in (-1, x_0)$ 递减，知 $f'(x) > f'(x_0)$ ，则

$h'(x) = f'(x) - f'(x_0) > 0$ ，所以 $h(x)$ 在 $x \in (-1, x_0)$ 递增，即 $h(x) < h(x_0) = f(x_0) - g(x_0) = 0$ ，

满足条件，则 $-1 < x_0 \leq 0$ 成立。

(ii) 若 $0 < x_0 < 1$ ，当 $x \in (x_0, 1)$ 时， $f'(x) > f'(x_0)$ ，即 $h'(x) = f'(x) - f'(x_0) > 0$ ，所以 $h(x)$ 在

$(x_0, 1)$ 递增，此时 $h(x) > h(x_0) = f(x_0) - g(x_0) = 0$ ，矛盾，不满足条件。

综上，由①②可得 $0 \leq x_0 < 1$ 且 $-1 < x_0 \leq 0$ ，即 $x_0 = 0$ ，所以只有一个“好”点 $P(0, 0)$ 。

19. (17分)

解：(1) 直线 P_1F_0 ： $x = \frac{3}{4}y + \frac{1}{4}$ 代入 $y^2 = x$ 可得 $y^2 - \frac{3}{4}y - \frac{1}{4} = 0$

设 $P_0(x_0, y_0)$ ，则 $y_0 + 1 = \frac{3}{4}$ ，所以 $y_0 = -\frac{1}{4}$ ，于是 $P_0(\frac{1}{16}, -\frac{1}{4})$ ，又因为 $F_1(1, 0)$ ，

而直线 P_0P_3 方程为 $x = \frac{15}{4}y - 1$ ，带入 $y^2 = x$ 可得 $y^2 - \frac{15}{4}y - 1 = 0$ ，设 $P_3(x_3, y_3)$

则 $y_3 + (-\frac{1}{4}) = \frac{15}{4}$ ，所以 $y_3 = 4$ ，所以 $P_3(16, 4)$ ，又因为 $P_2(1, -1)$

于是，直线 P_2P_3 方程为 $y + 1 = \frac{1}{3}(x - 1)$

令 $y=0$ ，得 $x=4$ ，所以 $F_2(4, 0)$ ，同理可得 $F_3(16, 0)$

所以 $m_1=1$ ， $m_2=4$ ， $m_3=16$ ；……………4 分

(2) 设直线 $P_{2k}P_{2k+1}$ 方程为 $x=\lambda_{2k}y+m_{2k}$ ，设 $P_{2k}(x_{2k}, y_{2k})$ ， $P_{2k+1}(x_{2k+1}, y_{2k+1})$

由 $\begin{cases} x=\lambda_{2k}y+m_{2k} \\ y^2=x \end{cases}$ 联立可得： $y^2-\lambda_{2k}y-m_{2k}=0$ 。于是， $y_{2k}y_{2k+1}=-m_{2k}$ ，则有 $x_{2k}x_{2k+1}=m_{2k}^2$

即 $m_{2k-1}m_{2k+1}=m_{2k}^2$ ① 于是，可化为 $\frac{m_{2k+1}}{m_{2k}}=\frac{m_{2k}}{m_{2k-1}}$ ；……………6 分

设直线 $P_{2k}P_{2k+3}$ 方程为 $x=\lambda'_{2k}y+m_{2k+1}$ ，设 $P_{2k+3}(x_{2k+3}, y_{2k+3})$

由 $\begin{cases} x=\lambda'_{2k}y+m_{2k+1} \\ y^2=x \end{cases}$ 联立得： $y^2-\lambda'_{2k}y-m_{2k+1}=0$ 。于是， $y_{2k}y_{2k+3}=-m_{2k+1}$ ，则有 $x_{2k}x_{2k+3}=m_{2k+1}^2$

即 $m_{2k-1}m_{2k+3}=m_{2k+1}^2$ ②……………8 分

下面证明 $\{m_n\}$ 成等比数列：

由①可得 $m_{2k+1}m_{2k+3}=m_{2k+2}^2$ ③，

由①×③可得 $m_{2k+1}^2m_{2k-1}m_{2k+3}=m_{2k}^2m_{2k+2}^2$ ④

由②④可得 $m_{2k-1}^2m_{2k+3}^2=m_{2k}^2m_{2k+2}^2$ 即 $m_{2k-1}m_{2k+3}=m_{2k}m_{2k+2}=m_{2k+1}^2$ ⑤

于是， $\frac{m_{2k+1}}{m_{2k}}=\frac{m_{2k+2}}{m_{2k+1}}=\frac{m_{2k}}{m_{2k-1}}$ ($k=1, 2, 3, \dots$)……………11 分

所以数列 $\{m_n\}$ 是等比数列，且首项为 $m_1=m$

知 $P_1(m, \sqrt{m})$ ， $P_2(m, -\sqrt{m})$ ， $F_0(\frac{1}{4}, 0)$

于是直线 P_1F_0 的方程为 $x=(\sqrt{m}-\frac{1}{4\sqrt{m}})y+\frac{1}{4}$ ，设 $P_0(x_0, y_0)$

由 $\begin{cases} x=(\sqrt{m}-\frac{1}{4\sqrt{m}})y+\frac{1}{4} \\ y^2=x \end{cases}$ 联立可得 $y^2-(\sqrt{m}-\frac{1}{4\sqrt{m}})y-\frac{1}{4}=0$

于是， $y_0y_1=y_0\cdot\sqrt{m}=-\frac{1}{4}$ ，所以 $y_0=-\frac{1}{4\sqrt{m}}$

于是 $x_0=\frac{1}{16m}$ ，所以 $P_0(\frac{1}{16m}, -\frac{1}{4\sqrt{m}})$ ，又 $F_1(m, 0)$

于是直线 P_0F_1 的方程为 $x=(4m\sqrt{m}-\frac{1}{4\sqrt{m}})y+m$ ，设 $P_3(x_3, y_3)$

由 $\begin{cases} x = (4m\sqrt{m} - \frac{1}{4\sqrt{m}})y + m \\ y^2 = x \end{cases}$ 联立可得 $y^2 - (4m\sqrt{m} - \frac{1}{4\sqrt{m}})y - m = 0$

于是, $y_0 y_3 = (-\frac{1}{4\sqrt{m}})y_3 = -m$, 所以 $y_3 = 4m\sqrt{m}$

于是 $x_3 = 16m^3 = m_3$

则公比 $q^2 = \frac{m_3}{m_1} = 16m^2$, 则 $q = 4m$

所以 $m_n = m(4m)^{n-1}$ 14 分

(3) $\frac{S_{\triangle P_{2k-2}P_{2k-1}F_{2k-1}}}{S_{\triangle F_{2k-1}P_{2k}P_{2k+1}}} = \frac{|x_{2k} - x_{2k-2}|}{|x_{2k+1} - x_{2k}|} = \frac{|m_{2k-1} - m_{2k-3}|}{|m_{2k+1} - m_{2k-1}|} = \frac{m_{2k-3}}{m_{2k-1}} = \frac{1}{q^2} = \frac{1}{16m^2}$ 为定值..17 分