

成都市 2022 级高中毕业班第三次诊断性检测

数学参考答案及评分意见

一、选择题:(每小题 5 分,共 40 分)

1. D; 2. C; 3. A; 4. D; 5. A; 6. B; 7. B; 8. C.

二、选择题:(每小题 6 分,共 18 分)

9. ACD; 10. AB; 11. ABD.

三、填空题:(每小题 5 分,共 15 分)

12. 2; 13. $[1, +\infty)$; 14. $\frac{27}{70}$.

四、解答题:(共 77 分)

15. 解:(1)设年份代码的平均数为 $\bar{x}$, 则 $\bar{x}=3$1 分

设常住人口城镇化率的平均数为 $\bar{y}$, 则 $\bar{y} = \frac{63.9+64.7+65.2+66.2+67.0}{5} = 65.4$.

.....2 分

因为 $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 = 10$,

.....3 分

$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = -2 \times (-1.5) + (-1) \times (-0.7) + 0 \times (-0.2) + 1 \times 0.8 + 2 \times 1.6 = 7.7$,

.....5 分

所以 $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{7.7}{10} = 0.77$.

.....6 分

所以 $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 65.4 - 0.77 \times 3 = 65.4 - 2.31 = 63.09$.

所以 y 关于 x 的回归方程为 $\hat{y} = 0.77x + 63.09$.

.....7 分

(2)由题意可知, X 的取值可能为 0, 1, 2,

.....8 分

因为 $P(X=0) = \frac{C_3^0 C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10}$;

.....9 分

$P(X=1) = \frac{C_3^1 C_2^1}{C_5^2} = \frac{3}{5}$;

.....10 分

$P(X=2) = \frac{C_3^2 C_2^0}{C_5^2} = \frac{3}{10}$.

.....11 分

所以 X 的分布列为:

X	0	1	2
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$

所以 X 的数学期望为 $E(X) = 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{3}{10} = \frac{6}{5}$13 分

16. 解:(1)由 $a_n(2S_n - a_n) = 1$,

令 $n=1$, 有 $a_1^2 = 1$, 因为 $a_n > 0$, 所以 $a_1 = 1$2 分

令 $n=2$, 有 $a_2(a_2 + 2a_1) = 1$, 即 $a_2^2 + 2a_2 = 1$, 由 $a_2 > 0$,

解得 $a_2 = \sqrt{2} - 1$. 所以 $S_1 = 1, S_2 = \sqrt{2}$4 分

(2)当 $n \geq 2$ 时, 由 $a_n = S_n - S_{n-1}$,6 分

代入 $a_n(2S_n - a_n) = 1$,

化简得 $(S_n - S_{n-1})(S_n + S_{n-1}) = 1$, 即 $S_n^2 - S_{n-1}^2 = 1 (n \geq 2)$,8 分

所以 $\{S_n^2\}$ 是首项为 1, 公差为 1 的等差数列.9 分

(3)由(2)可知 $S_n^2 = n$.

因为 $\{a_n\}$ 是正项数列, 所以 $S_n > 0$, 从而 $S_n = \sqrt{n}$11 分

由 $\frac{1}{S_n + S_{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$,13 分

所以 $T_n = (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sqrt{n+1} - 1$.

所以数列 $\left\{ \frac{1}{S_n + S_{n+1}} \right\}$ 的前 n 项的和 $T_n = \sqrt{n+1} - 1$15 分

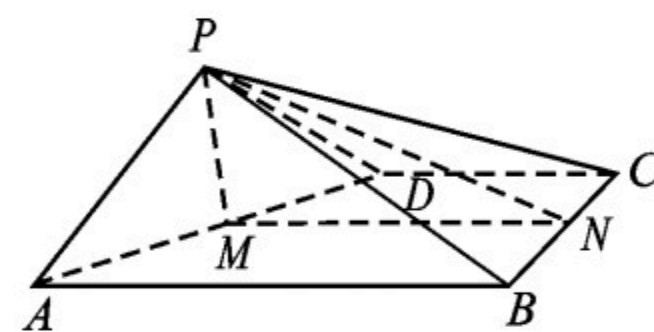
17. 解:(1)如图, 设线段 AD 的中点为 M , 线段 BC 的中点为 N ,

连接 PM, MN, PN .

因为 D 为 EC 中点, 所以 $PD = PA = 1$.

又因为 PM 是等腰 $\triangle PAD$ 底边上的中线, 所以 $PM \perp AD$.

.....1 分



同理可得 $PN \perp BC$.

.....2 分

因为 $ABCE$ 是矩形, 所以 $CD \parallel AB, AB \perp BC$.

因为 M, N 是中点, 所以 MN 是梯形 $ABCD$ 的中位线.

所以 $MN \parallel AB$, 从而 $MN \perp BC$.

.....3 分

因为 $MN \subset$ 平面 $PMN, PN \subset$ 平面 $PMN, MN \cap PN = N$,

所以 $BC \perp$ 平面 PMN .

.....4 分

因为 $PM \subset$ 平面 PMN , 所以 $BC \perp PM$.

因为 $AD \subset$ 平面 $ABCD, BC \subset$ 平面 $ABCD, AD$ 和 BC 相交,

所以 $PM \perp$ 平面 $ABCD$.

因为 $PM \subset$ 平面 PAD , 所以平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$.

.....6 分

(2) 易得 $AD \perp BD$. 由(1)可知 $PM \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $PM \perp BD$.

因为 $AD \subset$ 平面 PAD , $PM \subset$ 平面 PAD , $PM \cap AD = M$,

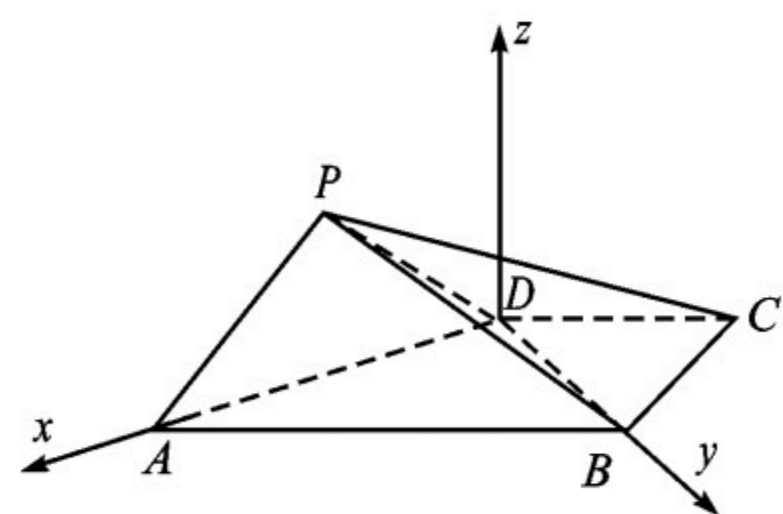
所以 $BD \perp$ 平面 PAD .

以 D 为坐标原点, $\overrightarrow{DA}$ 的方向为 x 轴正方向, 建立如图所示空间直角坐标系 $D-xyz$,

则 $A(\sqrt{2}, 0, 0)$, $B(0, \sqrt{2}, 0)$, $P(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$,

$\overrightarrow{AB} = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$, $\overrightarrow{AP} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

.....9 分



设 $\frac{PT}{TB} = \lambda > 0$, 则 $\overrightarrow{AT} = \frac{\lambda}{1+\lambda} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{1+\lambda} \overrightarrow{AP}$.

可得 $\sqrt{2}(1+\lambda) \overrightarrow{AT} = (-2\lambda-1, 2\lambda, 1)$.

.....11 分

由 $BD \perp$ 平面 PAD , 得平面 PAD 的一个法向量 $\mathbf{n} = (0, 1, 0)$.

.....13 分

设直线 AT 与平面 PAD 所成角为 θ ,

则 $\sin \theta = |\cos \langle \mathbf{n}, \overrightarrow{AT} \rangle| = \frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AT}|}{|\mathbf{n}| |\overrightarrow{AT}|} = \frac{2\lambda}{\sqrt{(-2\lambda-1)^2 + (2\lambda)^2 + 1}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$,

.....14 分

化简得 $8\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$, 解得 $\lambda = \frac{1}{2}$ 或 $\lambda = -\frac{1}{4}$ (舍).

所以当 $\frac{PT}{TB} = \frac{1}{2}$ 时, 直线 AT 与平面 PAD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

.....15 分

18. 解: (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$f'(x) = 2ax + (a-2) - \frac{1}{x} = \frac{(ax-1)(2x+1)}{x},$$

.....1 分

① 当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减;

.....3 分

② 当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = \frac{1}{a}$,

当 $x \in (0, \frac{1}{a})$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减;

当 $x \in (\frac{1}{a}, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增.

综上所述, 当 $a \leq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减;

当 $a > 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 上单调递减, 在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 单调递增.

.....5 分

(2)(i)若 $a \leq 0$, 由(1)知, $f(x)$ 至多有一个零点;6 分

若 $a > 0$, 由(1)知, 当 $x = \frac{1}{a}$ 时, $f(x)$ 取得最小值, 最小值为 $f(\frac{1}{a}) = 1 - \frac{1}{a} + \ln a$.

因为当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$; 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$,

所以函数 $f(x)$ 有两个零点当且仅当 $f(\frac{1}{a}) < 0$8 分

设 $g(a) = \ln a - \frac{1}{a} + 1$, 函数 $g(a)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增.

因为 $g(1) = 0$, $g(a) < 0$ 的解集为 $a \in (0, 1)$.

综上所述, a 的取值范围是 $(0, 1)$10 分

(ii) 因为 $f(x) = (x^2 + x)a - 2x - \ln x$,

由 $f(1) = 2a - 2 < 0$, 结合(i)知 $0 < x_0 < 1$,

要证 $x_0 f'(x_0) > -2$, 即证 $(2x_0 + 1)(ax_0 - 1) > -2$, 即 $ax_0(2x_0 + 1) > 2x_0 - 1$,

当 $0 < x_0 \leq \frac{1}{2}$ 时, 因为 $ax_0(2x_0 + 1) > 0$, $2x_0 - 1 \leq 0$, 不等式恒成立;12 分

当 $\frac{1}{2} < x_0 < 1$ 时, 由 $f(x_0) = 0$ 得 $ax_0(x_0 + 1) = \ln x_0 + 2x_0$.

即证 $(2x_0 + 1)(\ln x_0 + 2x_0) > (2x_0 - 1)(x_0 + 1)$.

即证 $\ln x_0 > \frac{(2x_0 - 1)(x_0 + 1)}{2x_0 + 1} - 2x_0 = \frac{-2x_0^2 - x_0 - 1}{2x_0 + 1} = -x_0 - \frac{1}{2x_0 + 1}$.

即证 $\ln x_0 + x_0 + \frac{1}{2x_0 + 1} > 0$14 分

设 $p(x) = \ln x + x + \frac{1}{2x + 1}$, $x \in (\frac{1}{2}, 1)$,

由 $p'(x) = \frac{1}{x} + 1 - \frac{2}{(2x + 1)^2} > \frac{1}{x} + 1 - \frac{2}{(2 \times \frac{1}{2} + 1)^2} > 0$,

所以 $p(x)$ 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 单调递增.

所以 $p(x) > p(\frac{1}{2}) = -\ln 2 + 1 > 0$, 故原不等式成立.

所以 $x_0 f'(x_0) > -2$17 分

19. 解: (1) 由题意, 直线 AB 斜率必存在, 设 $AB: y = kx + \frac{p}{2}$, $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$\text{联立} \begin{cases} y = kx + \frac{p}{2}, \\ x^2 = 2py \end{cases} \text{ 得 } x^2 - 2pkx - p^2 = 0, \Delta = 4p^2(k^2 + 1) > 0.$$

所以 $x_1 + x_2 = 2pk$, $x_1 x_2 = -p^2$.

.....2 分

$$\text{由 } \vec{OA} \cdot \vec{OB} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = x_1 x_2 + \frac{1}{4p^2} x_1^2 x_2^2 = -p^2 + \frac{p^2}{4} = -3.$$

解得 $p = 2$ 或 $p = -2$ (舍).

所以 $p = 2$.

.....4 分

(2) (i) 直线 AC 斜率必存在, 设 $AC: y = k_1 x + 3$, $C(x_3, y_3), D(x_4, y_4)$,

$$\text{联立} \begin{cases} x^2 = 4y, \\ y = k_1 x + 3 \end{cases} \text{ 得 } x^2 - 4k_1 x - 12 = 0, \text{ 所以 } x_1 x_3 = -12.$$

同理 $x_2 x_4 = -12$.

.....6 分

又因为 $x_1 x_2 = -4$, 所以 $x_3 x_4 = -36$.

.....7 分

直线 CD 斜率必存在, 设 $CD: y = k_2 x + m$,

$$\text{联立} \begin{cases} x^2 = 4y, \\ y = k_2 x + m \end{cases} \text{ 得 } x^2 - 4k_2 x - 4m = 0,$$

所以 $x_3 x_4 = -4m = -36$.

解得 $m = 9$, 所以直线 CD 过定点 $(0, 9)$.

即 P 的坐标为 $(0, 9)$.

.....9 分

(ii) 由 $k_{CD} = \frac{y_3 - y_4}{x_3 - x_4} = \frac{x_3 + x_4}{4}$, 且 $x_1 x_3 = x_2 x_4 = -12, x_1 x_2 = -4$,

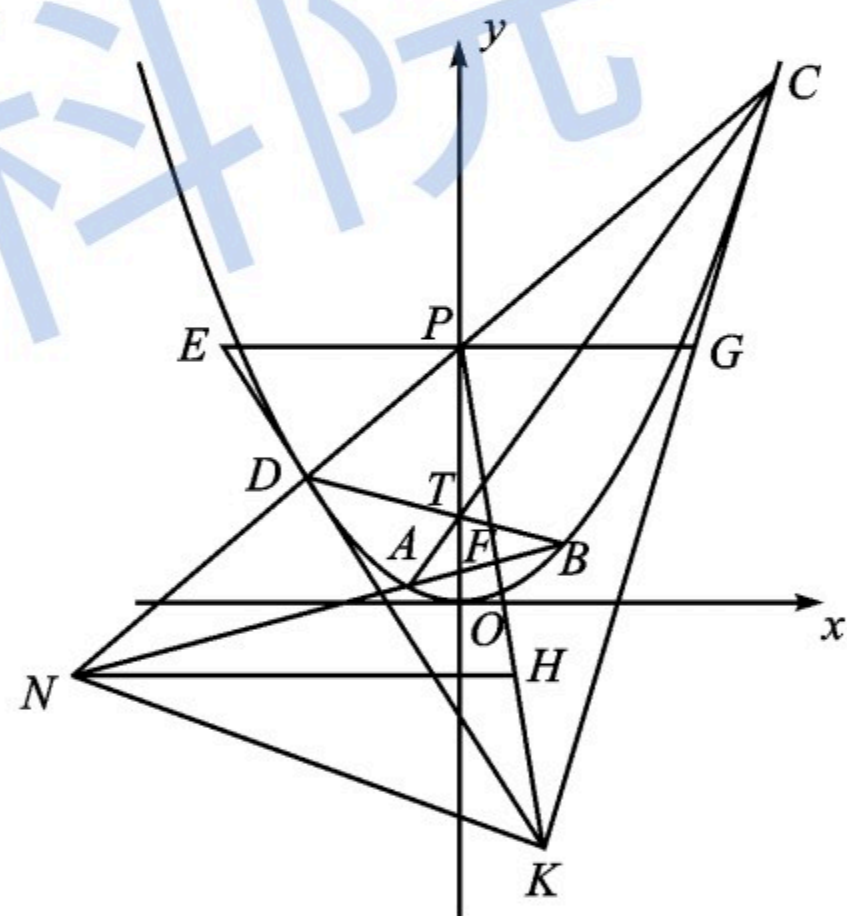
$$\text{得 } k_{CD} = \frac{x_3 + x_4}{4} = \frac{1}{4} \left(\frac{-12}{x_1} - \frac{12}{x_2} \right) = \frac{3}{4} (x_1 + x_2) = 3k.$$

所以直线 CD 的方程为 $y = 3kx + 9$.

由直线 CD 与直线 AB 相交, 可得 $k \neq 0$.

$$\text{联立} \begin{cases} y = 3kx + 9, \\ y = kx + 1 \end{cases} \text{ 解得 } N\left(-\frac{4}{k}, -3\right).$$

.....11 分



因为抛物线方程为 $y = \frac{x^2}{4}$, 所以 $y' = \frac{x}{2}$.

抛物线在点 C 处切线方程为 $y = \frac{x_3}{2}(x - x_3) + y_3 = \frac{x_3}{2}x - \frac{1}{4}x_3^2$.

所以 $E(\frac{18}{x_3} + \frac{x_3}{2}, 9)$.

同理 $G(\frac{18}{x_4} + \frac{x_4}{2}, 9)$.

$$\text{又 } \frac{18}{x_3} + \frac{x_3}{2} + \frac{x_4}{2} + \frac{18}{x_4} = \frac{18(x_3 + x_4)}{x_3 x_4} + \frac{x_3 + x_4}{2} = 0,$$

所以 EG 的中点为 P .

.....13 分

$$\text{联立 } \begin{cases} y = \frac{x_3}{2}x - \frac{1}{4}x_3^2, \\ y = \frac{x_4}{2}x - \frac{1}{4}x_4^2 \end{cases} \text{ 得 } K(\frac{x_3 + x_4}{2}, \frac{x_3 x_4}{4}),$$

由 $x_3 + x_4 = 3(x_1 + x_2)$ 及 $x_3 x_4 = -36$, 所以 $K(6k, -9)$.

.....15 分

过 N 作平行于 x 轴的直线交 PK 于点 H , 则 $H(4k, -3)$.

$$\text{所以 } S_1 + S_2 = 2S_{\triangle PNK} = |HN| \cdot (y_P - y_K) = |x_N - x_H| \cdot (y_P - y_K)$$

$$= 18|4k + \frac{4}{k}| = 72(|k| + \frac{1}{|k|}) \geq 144 \sqrt{|k| \cdot \frac{1}{|k|}} = 144.$$

当且仅当 $|k| = 1$ 时, 即直线 AB 方程为 $y = x + 1$ 或 $y = -x + 1$ 时等号成立.

.....17 分