

巴中市普通高中 2022 级“一诊”数学试题

参考答案

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	C	D	A	C	B	B	D

8 解析：令 $f(x) - 2 = t$ ，则有 $f(t) = 2, f(x) = 2 + t$ 。由题意得，当 $t \leq 0$ 时，方程 $t^2 + 2t + 2 = 2$ 有两根 $t_1 = -2, t_2 = 0$ ；当 $t > 0$ 时，方程 $|\ln t| = 2$ 有两根 $t_3 = e^{-2}, t_4 = e^2$ 。

当 $t_1 = -2$ 时， $f(x) = 2 + t_1 = 0$ ，则 $y = f(x)$ 的图像与直线 $y = 0$ 只有一个交点；

当 $t_2 = 0$ 时， $f(x) = 2 + t_2 = 2$ ，则 $y = f(x)$ 的图像与直线 $y = 2$ 有四个交点；

当 $t_3 = e^{-2}$ 时， $f(x) = 2 + t_3 = 2 + e^{-2}$ ，则 $y = f(x)$ 的图像与直线 $y = 2 + e^{-2}$ 有三个交点；

当 $t_4 = e^2$ 时， $f(x) = 2 + t_4 = 2 + e^2$ ，则 $y = f(x)$ 的图像与直线 $y = 2 + e^2$ 有三个交点。

综上所述：方程 $f(f(x) - 2) = 2$ 实数根的个数为 11 个。故选：D

二、多选题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

题号	9	10	11
答案	CD	BD	ABD

11 解析：由 $y = 2x^2$ 得 $p = \frac{1}{4}, F(0, \frac{1}{8})$ ，设直线 $l: y = kx + \frac{1}{8}$ ， $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), y_1 > 0, y_2 > 0$

，设 AF 的中点为 M ，即 $M(\frac{x_1}{2}, \frac{y_1 + \frac{p}{2}}{2})$ 到 x 轴的距离 $d = \frac{y_1 + \frac{p}{2}}{2} = \frac{|AF|}{2}$ ，则以 AF 为直径的圆与 x 轴相切，则 A 正确；

联立 $\begin{cases} y = kx + \frac{1}{8} \\ y = 2x^2 \end{cases}$ ，得 $16x^2 - 8kx - 1 = 0$ ， $\Delta = 64k^2 + 64 > 0$ ， $x_1 + x_2 = \frac{k}{2}, x_1x_2 = -\frac{1}{16}$ ，则 $y_1 +$

$y_2 = \frac{2k^2 + 1}{4}, y_1y_2 = \frac{1}{64}$ ，因为 $|AF| = y_1 + \frac{p}{2}, |BF| = y_2 + \frac{p}{2}$

$\frac{1}{|AF|} + \frac{1}{|BF|} = \frac{1}{y_1 + \frac{p}{2}} + \frac{1}{y_2 + \frac{p}{2}} = \frac{2}{2y_1 + p} + \frac{2}{2y_2 + p} = 8$ ，则 B 正确；

因为直线过焦点 F ，设直线 $AB: mx + 8y = 1$ ，联立 $y = 2x^2$ (齐次化方程)，得 $8y^2 + mxy - 2x^2 = 0$ ，两边同除以 x^2 得 $8(\frac{y}{x})^2 + m\frac{y}{x} - 2 = 0(*)$ ，则由题意知 k_1, k_2 是 $(*)$ 方程得两不等根

$(k_1 = \frac{y_1}{x_1}, k_2 = \frac{y_2}{x_2})$ ，所以 $k_1k_2 = -\frac{1}{4}$ ，则 C 错误；

由 $y = 2x^2$ 得 $y' = 4x$ ， $k_{AP} = 4x_1$ ，切线 AP 方程： $y - y_1 = 4x_1(x - x_1) = 4x_1x - 4x_1^2 = 4x_1x - 2y_1$ ，即 $y + y_1 = 4x_1x$ ①，同理切线 BP 方程： $y + y_2 = 4x_2x$ ②，由 ① - ② 得， $x_p = \frac{1}{4}k_{AB}$ ；①

得, $y_p = \frac{y_1x_2 - y_2x_1}{x_1 - x_2} = \frac{(kx_1 + \frac{1}{8})x_2 - (kx_2 + \frac{1}{8})x_1}{x_1 - x_2} = -\frac{1}{8}$, 即点 P 在 $y = -\frac{1}{8}$ 上, 则 D 正确.

故选: ABD

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. $\frac{4}{5}$

13. 1

14. $(\sqrt{3}, 2)$

14 解析: 延长 F_2M 交 PF_1 于点 Q , 连接 OM , 由题意知 $|PQ| = |PF_2|$, 又由双曲线的定义得 $|QF_1| = 2a$, 在三角形 QF_1F_2 中, 点 O, M 分别为 F_1F_2, QF_2 的中点, 则 $|OM| = a$.

设 $\angle MOF_2 = \theta$, 在三角形 OMF_1 中, $-\cos\theta = \frac{a^2 + c^2 - 3b^2}{2ac}$, 即 $\cos\theta = \frac{c^2 - 2a^2}{ac}$, 因为 θ 小于渐近线的倾斜角, 所以 $\frac{a}{c} < \cos\theta < 1$, 即 $\frac{a}{c} < \frac{c^2 - 2a^2}{ac} < 1$, 解得: $\sqrt{3} < e < 2$

四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (13 分) 解析: 记“甲、乙两次投中”分别记为 A_1, A_2, B_1, B_2 ,

则 $P(A_1) = P(A_2) = \frac{2}{3}, P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{3}$ 2 分

(1) 记事件 $M =$ “甲第一次未投中, 乙两次都投中”, 则事件 M 表示为: “甲第一次未投中, 第二次也未投中, 乙两次都投中”; 及“甲第一次未投中, 第二次投中, 乙两次都投中”, 即 $M = \bar{A}_1\bar{A}_2B_1B_2 + \bar{A}_1A_2B_1B_2$ 4 分

则: $P(M) = P(\bar{A}_1\bar{A}_2B_1B_2 + \bar{A}_1A_2B_1B_2) = (1 - \frac{2}{3}) \times (1 - \frac{2}{3}) \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + (1 - \frac{2}{3}) \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$

即“甲第一次未投中, 乙两次都投中”的概率为 $\frac{1}{27}$ 6 分

(2) 记事件 $N =$ “乙获胜”, 则事件 N 表示为: “甲两次均未投中, 乙投中 1 次或 2 次都投中”; 及“甲投中 1 次, 乙两次都投中”,

即 $N = \bar{A}_1\bar{A}_2B_1\bar{B}_2 + \bar{A}_1\bar{A}_2B_1B_2 + \bar{A}_1\bar{A}_2B_1B_2 + \bar{A}_1A_2B_1B_2 + A_1\bar{A}_2B_1B_2$ 8 分

$P(N) = P(\bar{A}_1\bar{A}_2B_1\bar{B}_2 + \bar{A}_1\bar{A}_2B_1B_2 + \bar{A}_1\bar{A}_2B_1B_2 + \bar{A}_1A_2B_1B_2 + A_1\bar{A}_2B_1B_2)$
 $= (1 - \frac{2}{3}) \times (1 - \frac{2}{3}) \times \frac{1}{3} \times (1 - \frac{1}{3}) + (1 - \frac{2}{3}) \times (1 - \frac{2}{3}) \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + (1 - \frac{2}{3}) \times (1 - \frac{2}{3}) \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + (1 - \frac{2}{3}) \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times (1 - \frac{2}{3}) \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ 12 分

即“乙获胜”的概率为 $\frac{1}{9}$ 13 分

16. (15 分) 解析: (1) 由于 $n \in N^*$, $2^n - 1 < 2^n$, 所以 $a_n = \frac{2^n - 1}{2^n} < 1$, 2 分

另外, $a_n = \frac{2^n - 1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$ 单调递增, 4 分

$$a_n \geq a_1 = \frac{1}{2}, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{即: } \frac{1}{2} \leq a_n < 1. \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 由题意得: } b_n = \log_2 \left(\frac{1}{1-a_n} \right) = \log_2 2^n = n \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{当 } n=1 \text{ 时, } 1 < \frac{7}{4} \text{ 显然成立; } \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{当 } n=2 \text{ 时, } \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} = \frac{5}{4} < \frac{7}{4} \text{ 成立; } \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{当 } n \geq 3 \text{ 时, } \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^2-n} = \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{b_1^2} + \frac{1}{b_2^2} + \dots + \frac{1}{b_n^2} &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} = \frac{7}{4} - \frac{1}{n} < \frac{7}{4} \end{aligned}$$

$$\text{综上所述: } \frac{1}{b_1^2} + \frac{1}{b_2^2} + \dots + \frac{1}{b_n^2} < \frac{7}{4} \dots\dots\dots 15 \text{ 分}$$

17.(15分) 解析: (1) 平面 $AEF \perp$ 平面 PBC , 理由如下: $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

$\because PA \perp$ 平面 $ABCD$, $BC \subset$ 平面 $ABCD$, $\therefore PA \perp BC$

又 $\because BC \perp AB$, 而 $PA \cap AB = A$, $\therefore BC \perp$ 平面 PAB $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

$\because AE \subset$ 平面 PAB , $\therefore BC \perp AE$.

$\because PA = PB$, E 为 PB 的中点, $\therefore AE \perp PB$. 而 $PB \cap BC = B$,

$\therefore AE \perp$ 平面 PBC . $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

$\because AE \subset$ 平面 AEP , $\therefore$ 平面 $AEF \perp$ 平面 PBC $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

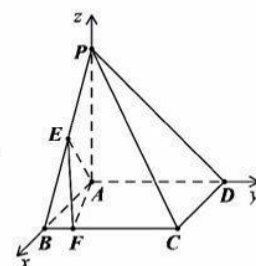
(2) 由底面 $ABCD$ 为正方形及 $PA \perp$ 底面 $ABCD$, AB, AD, AP 两两垂直,

以 AB, AD, AP 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴建立如图所示的空间直角坐标系,

不妨设 $AB = AP = 2$, 则 $A(0,0,0)$, $B(2,0,0)$, $D(0,2,0)$, $P(0,0,2)$, $C(2,2,0)$, $E(1,0,1)$

设 $F(2,t,0) (0 \leq t \leq 2)$ $\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

设平面 AEF 的法向量为 $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{AE} = (1,0,1)$, $\vec{AF} = (2,t,0)$,



则： $\begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{AE} = x_1 + z_1 = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{AF} = 2x_1 + ty_1 = 0 \end{cases}$, 取 $y_1 = 2$, 则 $x_1 = -t, z_1 = t$, 得 $\vec{m} = (-t, 2, t)$ 11 分

设平面 PCD 的法向量为 $\vec{n} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{PC} = (2, 2, -2)$, $\vec{PD} = (0, 2, -2)$, 则
 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{PC} = 2x_2 + 2y_2 - 2z_2 = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{PD} = 2y_2 - 2z_2 = 0 \end{cases}$, 取 $y_2 = 1$, 则 $z_2 = 1, x_2 = 0$, 得 $\vec{n} = (0, 1, 1)$ 13 分

$$|\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle| = \cos \frac{\pi}{6}, \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \cos \frac{\pi}{6}, \frac{|2+t|}{2\sqrt{t^2+2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$$

解得： $t = 1$, 即 $\frac{BF}{BC} = \frac{1}{2}$ 15 分

18. (17 分) 解析：(1) $f'(x) = \ln x + 1 (x > 0)$, 令 $f'(x) = 0$ 得 $x = e^{-1}$, 1 分

当 $0 < x < e^{-1}$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

当 $x > e^{-1}$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增; 2 分

$f(x)_{\text{极小值}} = f(e^{-1}) = -e^{-1}$, 无极大值. 4 分

(2) 原不等式等价于: $0 < x \leq 1, 2x \ln x \geq x^2 - 1$

即: $0 < x \leq 1, 2x \ln x - x^2 + 1 \geq 0$ 5 分

令 $g(x) = 2x \ln x - x^2 + 1, (0 < x \leq 1)$, 下证: $g(x) \geq 0$

则 $g'(x) = 2 \ln x + 2 - 2x, g''(x) = \frac{2}{x} - 2 = \frac{2(1-x)}{x} \geq 0$, 等号当且仅当 $x = 1$ 时成立,

..... 6 分

所以 $g'(x)$ 在 $0 < x \leq 1$ 上单调递增, $g'(x) \leq g'(1) = 0$, 等号当且仅当 $x = 1$ 时成立

..... 7 分

$g(x)$ 在 $0 < x \leq 1$ 上单调递减, $g(x) \geq g(1) = 0$, 即原不等式成立. 8 分

(3) 等价于 $h(x) = x^2 - 2t|1 + \ln x|, (0 < t < 1)$ 的零点个数问题: 9 分

① 当 $0 < x < e^{-1}$ 时, $h(x) = x^2 + 2t(1 + \ln x)$, 显然 $h(x)$ 在 $(0, e^{-1})$ 上单调递增,

又 $h(0) \rightarrow -\infty, h(e^{-1}) = e^{-2} > 0$, 所以 $h(x)$ 在 $(0, e^{-1})$ 上总有唯一的零点; 10 分

② 当 $x > e^{-1}$ 时, $h(x) = x^2 - 2t(1 + \ln x)$,

则 $h'(x) = x^2 - 2t(1 + \ln x) = 2x - \frac{2t}{x} = \frac{2(x + \sqrt{t})(x - \sqrt{t})}{x}$ 11 分

(I) 若 $0 < t \leq e^{-2}$, 则 $h'(x) > 0$ 在 $(e^{-1}, +\infty)$ 上恒成立, $h(x)$ 在 $(e^{-1}, +\infty)$ 上单调递增,

$h(x) > h(e^{-1}) = e^{-2} > 0$, $h(x)$ 在 $(e^{-1}, +\infty)$ 上无零点; 12 分

(II) 若 $e^{-2} < t < 1$, 当 $e^{-1} < x < \sqrt{t}$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减;

当 $x > \sqrt{t}$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增;

$h(x)_{\min} = h(\sqrt{t}) = -t(1 + \ln t)$, 令 $h(x)_{\min} = h(\sqrt{t}) = 0$, 得 $t = e^{-1}$ 13 分

(i) 若 $e^{-2} < t < e^{-1}$, 则 $h(x)_{\min} = h(\sqrt{t}) > 0$, $h(x)$ 在 $(e^{-1}, +\infty)$ 上无零点 14 分

(ii) 若 $t = e^{-1}$, 则 $h(x)_{\min} = h(\sqrt{t}) = 0$, $h(x)$ 在 $(e^{-1}, +\infty)$ 上有唯一零点 15 分

(iii) 若 $e^{-1} < t < 1$, 则 $h(x)_{\min} = h(\sqrt{t}) < 0$, 又 $h(e^{-1}) = e^{-2} > 0$,

又由 (2) 知 $\ln x \leq x - 1$, $x \ln x \leq x^2 - x$ 得, 得 $h(2t) = 4t^2 - 2t - 2t \ln 2t \geq 0$,

由零点存在性定理可知, $h(x)$ 在 $(e^{-1}, \sqrt{t})$, $(\sqrt{t}, 2t]$ 上各有一个零点. 16 分

综上所述: 当 $0 < t < e^{-1}$ 时, $h(x)$ 有一个零点; 当 $t = e^{-1}$ 时, $h(x)$ 有两个零点;

当 $e^{-1} < t < 1$ 时, $h(x)$ 有三个零点. 17 分

19. (17 分) 解析 (1)

$$\begin{aligned} x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d &= (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) \\ &= x^4 - (x_1+x_2+x_3+x_4)x^3 + (x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)x^2 \\ &\quad - (x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4)x + x_1x_2x_3x_4 \end{aligned}$$

..... 2 分

对比系数得: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -a$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = b$ 4 分

(2) 由 $3(x-m)^2 + (y-n)^2 = 6$, 得: $3(x-m)^2 + y^2 + n^2 - 6 = 2yn$

平方得: $[3(x-m)^2 + y^2 + n^2 - 6]^2 = 4y^2n^2$

将 $y^2 = 3x^2 - 3$ 代入, 化简得 $x^4 - 2mx^3 + (2m^2 - 3)x^2 - (m^3 + \frac{1}{3}mn^2 - 3m)x + \frac{9m^4 + n^4 + 6m^2n^2 - 54m^2 - 6n^2 + 81}{36} = 0$ 6 分

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3), D(x_4, y_4)$,

由 (1) 知 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2m$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = 2m^2 - 3$,

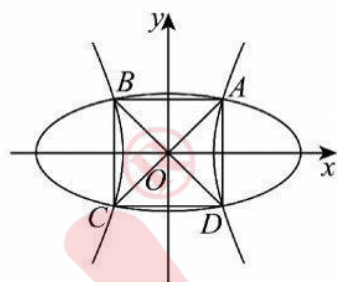
..... 8 分

$$\begin{aligned}
 \text{故 } OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 \\
 &= 4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) - 12 \\
 &= 4[(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4)] - 12 \\
 &= 4[4m^2 - 2(2m^2 - 3)] - 12 = 12. \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}
 \end{aligned}$$

(3) 记 $OA = a, OB = b, OC = c, OD = d$.

当 O 在内部时, 设 $\angle AOB = \theta_1, \angle BOC = \theta_2, \angle COD = \theta_3, \angle AOD = \theta_4$,

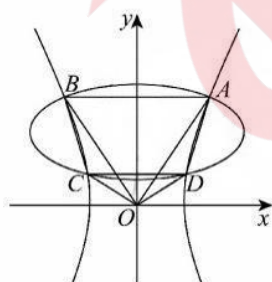
$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2}(ab\sin\theta_1 + bc\sin\theta_2 + cd\sin\theta_3 + ad\sin\theta_4) \\
 &\leq \frac{1}{2}(ab + bc + cd + ad)(\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = 90^\circ) \\
 &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{b^2 + c^2}{2} + \frac{c^2 + d^2}{2} + \frac{d^2 + a^2}{2}\right)(a = b = c = d) \\
 &= \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = 6. \quad \dots\dots\dots 13 \text{ 分}
 \end{aligned}$$



当且仅当四边形 $ABCD$ 为正方形 ($m = n = 0$) 取等.

当 O 在外部时, 设 $\angle AOB = \alpha, \angle BOC = \beta, \angle AOD = \gamma, \angle COD = \alpha + \beta + \gamma$,

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2}[ab\sin\alpha + bc\sin\beta + ad\sin\gamma - cd\sin(\alpha + \beta + \gamma)] < \frac{1}{2}(ab + bc + cd + ad) \\
 &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{b^2 + c^2}{2} + \frac{c^2 + d^2}{2} + \frac{d^2 + a^2}{2}\right)(a = b = c = d) = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = 6. \quad \dots\dots\dots 16 \text{ 分}
 \end{aligned}$$



综上, 四边形 $ABCD$ 面积最大值为 6. $\dots\dots\dots 17 \text{ 分}$