

巴中市普通高中 2022 级“一诊”考试

数学试题

(满分 150 分 120 分钟完卷)

注意事项:

1. 答题前, 考生务必将自己的姓名、班级、考号填写在答题卡规定的位置.

2. 答选择题时请使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑; 非选择题答题时必须用 0.5 毫米黑色墨迹签字笔, 将答案书写在答题卡规定的位置, 在规定的答题区域以外答题无效, 在试题卷上答题无效.

3. 考试结束后, 考生将答题卡交回.

一、单选题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知复数 z 在复平面内满足 $|z| \leq 1$, 则复数 z 对应的点 Z 的集合所形成图形的面积为

- A. $\frac{\pi}{2}$ B. π C. $\frac{3}{2}\pi$ D. 2π

2. 已知集合 $A = \{x \mid |x+1| > 1\}$, $B = \{x \mid \frac{1}{x} > 2\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $(-\infty, 0) \cup (0, \frac{1}{2})$ B. $(\frac{1}{2}, +\infty)$ C. $(0, \frac{1}{2})$ D. $(\frac{1}{2}, 1)$

3. 已知实数 a, b , 则 $a > b$ 是 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 的

- A. 充分非必要条件 B. 必要非充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

4. 已知向量 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (-1, 1)$. 若 $(t\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$, 则 $t =$

- A. -2 B. -1 C. $-\frac{1}{2}$ D. 1

5. 若函数 $f(x) = \frac{a \cdot 2^x + 2}{2^x}$ 为奇函数, 则 $a =$

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 4

6. 已知 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_4 = 12$, $S_8 = 40$, 则 $S_{10} =$

- A. 56 B. 60 C. 64 D. 68

7. 已知三棱锥 $P-ABC$ 四个顶点都在球 O 面上, $PA = PB = PC = 2$, $\angle APB = 90^\circ$, M 为 AB 的中点, C 在面 APB 内的射影为 PM 的中点, 则球 O 的表面积等于

- A. $\frac{128}{7}\pi$ B. $\frac{64}{7}\pi$ C. $\frac{32}{7}\pi$ D. $\frac{16}{7}\pi$

8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 2, & x \leq 0, \\ |\ln x|, & x > 0, \end{cases}$ 则方程 $f(f(x) - 2) = 2$ 实数根的个数为

- A. 6 B. 7 C. 10 D. 11

二、多选题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 下列命题正确的有

- A. 回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 过样本点的中心 $(\bar{x}, \bar{y})$ ，且至少过一个样本点
 B. 两个变量相关性越强，则相关系数 r 越接近 1
 C. 将一组数据中的每一个数据都加上同一个正数，则其方差不变
 D. 将 9 个数的一组数去掉一个最小和一个最大数，则中位数不变

10. 已知函数 $f(x) = \cos^4 x - \sin^4 x$ ，则

- A. $x = \frac{\pi}{4}$ 是 $f(x)$ 的对称轴
 B. $f(x)$ 的最小正周期为 π
 C. $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ 上单调递减
 D. $f(x)$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程为 $y = 1$

11. 过抛物线 $y = 2x^2$ 的焦点 F 作直线与抛物线交于 A, B 两点， O 为坐标原点，若直线 OA, OB 的斜率分别为 k_1, k_2 ，则

- A. 以 AF 为直径的圆与 x 轴相切
 B. $\frac{1}{|AF|} + \frac{1}{|BF|} = 8$
 C. $k_1 k_2 = -2$
 D. 分别过 A, B 两点作抛物线的切线 l_1, l_2 相交于点 P ，则点 P 在 $y = -\frac{1}{8}$ 上

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 已知 $\frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} = \frac{1}{3}$ ，则 $\sin 2\alpha =$ _____.

13. 2^{2025} 除以 7 的余数为_____.

14. 已知 F_1, F_2 分别是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左右焦点，点 P 在双曲线右支上且不与右顶点重合，过 F_2 作 $\angle F_1 P F_2$ 平分线的垂线，垂足为 M 。若 $|F_1 M| = \sqrt{3}b$ ，则离心率的取值范围为_____.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分)

甲乙两人进行投篮比赛，要求各投篮 2 次. 已知甲乙两人每次投中的概率分别为 $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$, 且每人每次投中与否互不影响.

- (1) 求“甲第一次未投中，乙两次都投中”的概率；
- (2) 求“乙获胜”的概率.

16. (15 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \frac{2^n - 1}{2^n}$.

(1) 求证: $\frac{1}{2} \leq a_n < 1$;

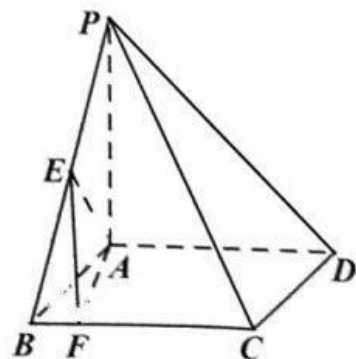
(2) 令 $b_n = \log_2 \frac{1}{1-a_n}$, 证明: $\frac{1}{b_1^2} + \frac{1}{b_2^2} + \cdots + \frac{1}{b_n^2} < \frac{7}{4}$.

17. (15 分)

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA \perp$ 底面 $ABCD$ ， $PA = AB$ ， E 为线段 PB 的中点， F 为线段 BC 上的动点.

(1) 若 $BC \perp AB$ ，平面 AEF 与平面 PBC 是否互相垂直？如果垂直，请证明；如果不垂直，请说明理由.

(2) 若底面 $ABCD$ 为正方形，当平面 AEF 与平面 PCD 夹角为 $\frac{\pi}{6}$ 时，求 $\frac{BF}{BC}$ 的值.



18. (17 分)

已知函数 $f(x) = x \ln x$.(1) 求函数 $f(x)$ 的极值;(2) 求证: 当 $0 < x \leq 1$ 时, $2f(x) \geq x^2 - 1$;(3) 若 $h(x) = x^2 - 2t \left| 1 + \frac{f(x)}{x} \right|$, 其中 $0 < t < 1$, 讨论函数 $h(x)$ 的零点个数.

19. (17 分)

已知双曲线 $C_1: x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 与曲线 $C_2: 3(x-m)^2 + (y-n)^2 = 6$ 有 4 个交点 A, B, C, D (按逆时针排列).(1) 若方程 $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ 有 4 个实数根 x_1, x_2, x_3, x_4 .证明: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -a$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = b$.(2) 设 O 为坐标原点, 证明: $|OA|^2 + |OB|^2 + |OC|^2 + |OD|^2$ 为定值;(3) 求四边形 $ABCD$ 面积的最大值.