

高中 2022 级第二次诊断性考试

数学参考答案及评分标准

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1. D 2. A 3. C 4. B 5. D 6. B 7. A 8. C

二、选择题：本大题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分，选对但不全的得部分分，有选错的得 0 分.

9. BCD 10. BC 11. ABD

三、填空题：本题共 3 个小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 3; 13. $\frac{2}{3}$; 14. $3+2\sqrt{7}$

四、解答题：本题共 5 小题，第 15 题 13 分，第 16、17 小题 15 分，第 18、19 小题 17 分，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 解：(1) $\because a+b=2c\cos B$,

由正弦定理得： $\sin A + \sin B = 2\sin C \cos B$, 2 分

又 $C = \frac{\pi}{2}$, 则 $\sin A = \cos B$,

$\therefore \cos B + \sin B = 2\cos B$, 4 分

$\therefore \tan B = 1$, 又 B 是三角形内角, 5 分

$\therefore B = \frac{\pi}{4}$; 6 分

(2) $\because a+b=2c\cos B$, 且 $b=3$, $a=1$,

$\therefore c\cos B = 2$, 8 分

$\therefore c \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = 2$, 9 分

$\therefore a^2 + c^2 - b^2 = 4a$, 11 分

$\therefore c = 2\sqrt{3}$ 13 分

16. 解：(1) $a=0$ 时, $f(x) = e^x + 1$, $f(1) = e + 1$, 且 $f'(x) = e^x$, 2 分

$\therefore k = f'(1) = e$, 4 分

故切线方程为: $y - (e+1) = e(x-1)$, 即 $ex - y + 1 = 0$; 6 分

(2) $\because f'(x) = e^x - a$, $e^x \in [1, e]$, 7 分

由 $1 < a < e$, 存在 $x_0 \in [0, 1]$, 使得 $f'(x_0) = 0$, 即 $e^{x_0} = a$, $x_0 = \ln a$, 9 分

当 $x \in [0, x_0)$ 时, $f'(x_0) < 0$, $f(x)$ 单调递减; 10 分

当 $x \in (x_0, 1]$ 时, $f'(x_0) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 11 分

故 $f(x)_{\min} = f(x_0) = e^{x_0} - ax_0 + 1 = a - a \ln a + 1 = 3 - 2 \ln 2$, 12 分

令 $g(a) = a - a \ln a + 1$, $g'(a) = 1 - (1 + \ln a) = -\ln a < 0$, 13 分

$\therefore g(a)$ 在 $(1, e)$ 上单调递减, 14 分

易知 $g(2) = 3 - 2 \ln 2$, 所以 $a = 2$ 15 分

17. 解：（1）设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

令 $n=1$, 得 $\frac{1}{a_1 a_2} = \frac{1}{4}$, 所以 $a_1 a_2 = 4$, 2 分

令 $n=2$, 得 $\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} = \frac{2}{7}$, 所以 $a_2 a_3 = 28$, 4 分

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 的公差大于 0,

$\therefore a_1 = 1, d = 3$, 所以 $a_n = 3n - 2$; 6 分

（2）（i） $k=1$ 时, $n=1$, 则 $b_1 = 1$; 7 分

$k=1$ 时, $1 = a_k < 2 < 3 < a_{k+1} = 4$, 8 分

$\therefore b_2 = 2^1 = 2, b_3 = 2^1 = 2$; 9 分

（ii）由题意可知: $a_k < a_k + 1 < a_k + 2 < a_{k+1}$, 10 分

①当 $n = a_k$ 时, $b_{a_k} = k$, 则 $b_{a_n} = n, \therefore b_{3n-2} = n$; 11 分

②当 $n = a_k + 1$ 时, $b_{a_k+1} = 2^k$, 则 $b_{a_n+1} = 2^n, \therefore b_{3n-1} = 2^n$; 12 分

③当 $n = a_k + 2$ 时, $b_{a_k+2} = 2^k$, 则 $b_{a_n+2} = 2^n, \therefore b_{3n} = 2^n$, 13 分

$\therefore S_{3n} = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{3n}$

$$= (b_1 + b_4 + \cdots + b_{3n-2}) + (b_2 + b_5 + \cdots + b_{3n-1}) + (b_3 + b_6 + \cdots + b_{3n})$$

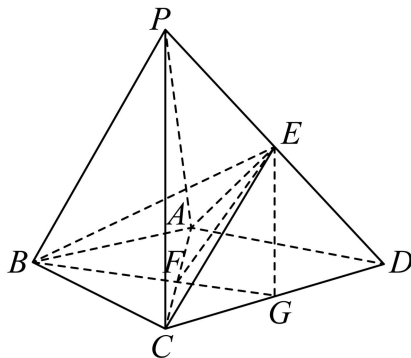
$$= (1 + 2 + \cdots + n) + (2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n) + (2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n)$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(1-2^n)}{1-2} \times 2$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + 2^{n+2} - 4, \text{ 14 分}$$

$$\therefore S_{20} = S_{21} - b_{21} = \frac{7 \times 8}{2} + 2^9 - 4 - 2^7 = 408. \text{ 15 分}$$

18. 解法一：（1）证明：如图 1，设 AC 的中点为 F ，连接 BF 并延长交 CD 于点 G ，



易知 $\triangle ABC$ 为等边三角形，且 $BG \perp AC$ ，..... 1 分

在 $\triangle ACD$ 中， $AC=AD=2$ ，满足 $AC^2 + AD^2 = CD^2$ ，

$\therefore AD \perp AC$ ，则 G 为 CD 中点，..... 2 分

又点 E 为 PD 中点， G 为 CD 中点，

$\therefore EG \parallel PC$ ，又 $PC \perp AC$ ，

$\therefore AC \perp EG$ ，..... 3 分

而 BG ， EG 均在平面 BEG 内，且 $BG \cap EG = G$ ，

$\therefore AC \perp$ 平面 BEG ， $BE \subseteq$ 平面 BEG ，

$\therefore AC \perp BE$ ；..... 5 分

（2）因为 $AC \perp$ 平面 BEF ，则 $AC \perp EF$ ， $AC \perp FG$ ，..... 6 分

因此 $\angle EFG$ 即为二面角 $E-AC-D$ 的平面角，

$\therefore \cos \angle EFG = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，而 $AE = 2$ ，..... 7 分

$\therefore$ 在 $\triangle EFG$ 中， $EF = \sqrt{AE^2 - AF^2} = \sqrt{3}$ ，由余弦定理得 $EG = \sqrt{2}$ ，..... 8 分

$\therefore EG^2 + FG^2 = EF^2$ ，则 $EG \perp FG$ ，..... 9 分

$\therefore EG \perp$ 平面 $ABCD$ ， $PC \perp$ 平面 $ABCD$ ， $EG = \sqrt{2}$ ， $PC = 2\sqrt{2}$ ，

由 $AD \perp AC$ ，则 $\triangle ACD$ 的面积为 2，..... 10 分

$\therefore$ 三棱锥 $P-ACD$ 的体积 $V = \frac{1}{3} \times 2 \times 2\sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ ；..... 11 分

（3）由 $PC \parallel EG$ ，则直线 PC 与平面 ACE 所成角即为直线 EG 与平面 ACE 所成角，

由（1）可知 $AC \perp$ 平面 BEG ， $AC \subseteq$ 平面 ACE ，

$\therefore$ 平面 $BEG \perp$ 平面 ACE ，因此 $\angle FEG$ 即为所求角，..... 12 分

思路一：在 $\triangle EFG$ 中， $EF = \sqrt{3}$ ， $FG = 1$ ，由正弦定理： $\frac{EF}{\sin \angle EGF} = \frac{FG}{\sin \angle FEG}$ ，..... 13 分

$\therefore \sin \angle FEG = \frac{\sin \angle EGF}{\sqrt{3}}$ ，..... 14 分

当 $\sin \angle EGF = 1$ ，即如（2）中 $EG \perp$ 平面 $ABCD$ 时，..... 15 分

$\sin \angle FEG = \frac{\sin \angle EGF}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，..... 16 分

$\therefore$ 直线 PC 与平面 ACE 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 。..... 17 分

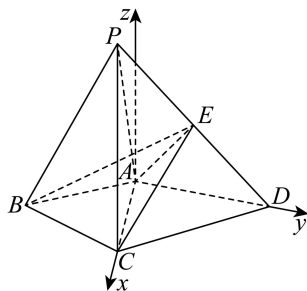
思路二：在 $\triangle EFG$ 中， $EF = \sqrt{3}$ ， $FG = 1$ ，

故点 G 在以 F 为圆心，1 为半径的圆上，..... 12 分

当 EG 与该圆相切时，即如（2）中 $EG \perp$ 平面 $ABCD$ 时， $\angle FEG$ 最大，..... 14 分

此时 $\sin \angle FEG = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，..... 16 分

$\therefore$ 直线 PC 与平面 ACE 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 。..... 17 分



解法二：（1）证明：易知 $\triangle ABC$ 为等边三角形在 $\triangle ACD$ 中， $AC=AD=2$ ，
满足 $AC^2 + AD^2 = CD^2$ ， $\therefore AD \perp AC$ ，
以 A 为坐标原点，建立上如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$ ，

设点 $P(x, y, z)$ ， $C(2, 0, 0)$ ， $D(0, 2, 0)$ ， $B(1, -\sqrt{3}, 0)$ ， $E(\frac{x}{2}, \frac{y+2}{2}, \frac{z}{2})$ ，

易知 $\overrightarrow{AC}=(2, 0, 0)$ ， $\overrightarrow{PC}=(2-x, -y, -z)$ ， $\overrightarrow{BE}=(\frac{x}{2}-1, \frac{y+2}{2}+\sqrt{3}, \frac{z}{2})$2分

由 $PC \perp AC$ ，则 $2(2-x)=0$ ，则 $x=2$ ，.....3分

则 $\overrightarrow{BE}=(0, \frac{y+2}{2}+\sqrt{3}, \frac{z}{2})$4分

$\therefore \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BE}=0$ ，则 $AC \perp BE$ ；.....5分

（2）由（1）可知 $AC \perp$ 平面 BEG ， $AC \subseteq$ 平面 $ABCD$ ，

$\therefore$ 平面 $BEG \perp$ 平面 $ABCD$ ，.....6分

以 A 为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$ ，

设点 $E(1, m, n)$ （ $m < 2$ ， $n > 0$ ），易知 $\overrightarrow{AC}=(2, 0, 0)$ ， $\overrightarrow{OE}=(1, m, n)$ ，

设平面 ACE 的法向量为： $\mathbf{n}_1=(x, y, z)$ ，

$\therefore \begin{cases} x=0 \\ x+my+nz=0 \end{cases}$ ，不妨令 $z=m$ ，则平面 ACE 的一个法向量为： $\mathbf{n}_1=(0, -n, m)$ ，

又平面 ACD 的一个法向量为 $\mathbf{n}_2=(0, 0, 1)$ ，.....7分

$\therefore \cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{|m|}{1 \times \sqrt{m^2 + n^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，.....8分

$\therefore |\overrightarrow{AE}| = \sqrt{1 + m^2 + n^2} = 4$ ，则 $m^2 + n^2 = 3$ ，

解得： $n = \sqrt{2}$ ，则点 E 到平面 ACD 的距离为 $\sqrt{2}$ ，

由 E 为 PD 的中点，则点 P 到平面 ACD 的距离为 $2\sqrt{2}$ ，.....9分

在 $\triangle ACD$ 中， $AC=AD=2$ ，满足 $AC^2 + AD^2 = CD^2$ ，

$\therefore AD \perp AC$ ，则 $\triangle ACD$ 的面积为2，.....10分

$\therefore$ 三棱锥 $P-ACD$ 的体积 $V = \frac{1}{3} \times 2 \times 2\sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ ；.....11分

（3）由 $PC \parallel EG$ ，则直线 PC 与平面 ACE 所成角即为直线 EG 与平面 ACE 所成角，设为 θ ，

由 $G=(1, 1, 0)$ ，则 $\overrightarrow{EG}=(0, 1-m, -n)$ ，.....12分

$\therefore \sin \theta = \frac{|\overrightarrow{EG} \cdot \mathbf{n}_1|}{|\overrightarrow{EG}| |\mathbf{n}_1|} = \frac{|-n(1-m)-mn|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{(1-m)^2 + n^2}} = \frac{|-n(1-m)-mn|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{(1-m)^2 + n^2}} = \frac{|n|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{4-2m}}$13分

$\therefore \sin^2 \theta = \frac{n^2}{3(4-2m)} = \frac{3-m^2}{3(4-2m)} = \frac{1}{6} \cdot \frac{m^2-3}{m-2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{(m-2)^2+4(m-2)+1}{m-2}$14分

$= -\frac{1}{6} \cdot [(2-m) + \frac{1}{2-m} - 4]$

$\leq -\frac{1}{6} \cdot [2\sqrt{(2-m) \cdot \frac{1}{2-m}} - 4] = \frac{1}{3}$ （当且仅当 $m=1$ 时，等号成立）.....16分

即 $\sin \theta$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ，

$\therefore$ 直线 PC 与平面 ACE 所成角正弦值的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 。.....17分

19. 解：（1）由已知得， $2a \times 2b = 8\sqrt{3}$ ，即 $ab = 2\sqrt{3}$ ，.....1 分
- 又离心率为 $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$ ，则 $a^2 = 4c^2$ ，
- $\therefore b^2 + c^2 = a^2$ ，所以 $\frac{3a^2}{4} = b^2$ ，即 $\sqrt{3}a = 2b$ ，.....2 分
- $\therefore a = 2$ ， $b = \sqrt{3}$ ，.....3 分
- $\therefore$ 椭圆 Γ 的标准方程为： $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ ；.....4 分
- （2）设点 $M(x_0, y_0)$ ，则点 M 满足： $\frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{3} = 1$ ，则 $\frac{y_0^2 - 3}{x_0^2} = -\frac{3}{4}$ ，
- 由已知可得 $F(0, -\sqrt{3})$ ， $H(0, \sqrt{3})$ ，设直线 MF 与 MH 的斜率分别为 k_1 ， k_2 ，
- $\therefore k_1 = \frac{y_0 + \sqrt{3}}{x_0}$ ， $k_2 = \frac{y_0 - \sqrt{3}}{x_0}$ ，.....5 分
- 直线 MF 与 MH 的斜率之积满足： $k_1 \cdot k_2 = \frac{y_0 + \sqrt{3}}{x_0} \cdot \frac{y_0 - \sqrt{3}}{x_0} = \frac{y_0^2 - 3}{x_0^2} = -\frac{3}{4}$ ，.....6 分
- （i） $\therefore D(2, \sqrt{3})$ ， $G(2, 0)$ ，则 $|DG| = \sqrt{3}$ ， $|OG| = 2$ ，
- 直线 PF 的方程为： $y = k_1x - \sqrt{3}$ ，令 $y = 0$ ，则 $P(\frac{\sqrt{3}}{k_1}, 0)$ ，
- $\therefore |OP| = \frac{\sqrt{3}}{|k_1|}$ ，.....7 分
- 直线 HQ 的方程为： $y = k_2x + \sqrt{3}$ ，令 $x = 2$ ，可得 $Q(2, 2k_2 + \sqrt{3})$ ，
- $\therefore |DQ| = 2|k_2|$ ，
- $\therefore |OP| \cdot |DG| = \frac{\sqrt{3}}{|k_1|} \cdot \sqrt{3} = \frac{3}{|k_1|}$ ，.....8 分
- 且 $|OG| \cdot |DQ| = 2 \times 2|k_2| = 4|k_2| = 4 \times \frac{3}{4|k_1|} = \frac{3}{|k_1|}$ ，.....9 分
- $\therefore |OP| \cdot |DG| = |OG| \cdot |DQ|$ ；.....10 分
- （ii）存在 $K(\frac{2}{5}, \frac{2\sqrt{3}}{5})$ ，使得 $|TK|$ 定值 $\frac{4}{5}$ ，理由如下：.....11 分
- 设点 $S(x_0, y_0)$ ， $I(x_1, y_1)$ ， $J(x_2, y_2)$ ，
- ①当过椭圆上点 $I(x_1, y_1)$ 的直线 l 斜率存在时，设直线 l 方程为： $y = kx + m$ ，
- 带入椭圆 Γ 的方程： $3x^2 + 4y^2 - 12 = 0$ ，
- 化简并整理得： $(4k^2 + 3)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 12 = 0$ ，
- $\therefore$ 直线 l 与椭圆仅有一个公共点，
- $\therefore \Delta = (8km)^2 - 4(4k^2 + 3)(4m^2 - 12) = 0$ ，

化简得： $4k^2 - m^2 + 3 = 0$, 12 分

$$\therefore x_1 = \frac{-4km}{4k^2 + 3} = \frac{-4k}{m}, \text{ 代入 } y = kx + m, \text{ 得 } y_1 = \frac{3}{m},$$

$$\therefore k = -\frac{mx_1}{4} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{x_1}{y_1},$$

从而直线 l 的方程为： $y = -\frac{3x_1}{4y_1}x + \frac{3}{y_1}$, 即 $\frac{xx_1}{4} + \frac{yy_1}{3} = 1$, 13 分

②当过 $I(x_1, 0)$ 的直线 l 斜率不存在且与椭圆 Γ 仅有一个公共点时, 直线 l 的方程为： $x = \pm x_1 = \pm 2$, 满足上式.

同理：当过椭圆上点 $J(x_2, y_2)$ 的直线： $\frac{xx_2}{4} + \frac{yy_2}{3} = 1$ 与椭圆 Γ 仅有一个公共点,

这两条直线都过点 S , 所以有 $\frac{x_1x_0}{4} + \frac{y_1y_0}{3} = 1$, $\frac{x_2x_0}{4} + \frac{y_2y_0}{3} = 1$,

$\therefore$ 直线 IJ 的方程为 $\frac{x_0x}{4} + \frac{y_0y}{3} = 1$ 14 分

由 (i) 则直线 PF 的方程为： $y = k_1x - \sqrt{3}$, 令 $y = \sqrt{3}$, 则 $R(\frac{2\sqrt{3}}{k_1}, \sqrt{3})$,

又 $Q(2, 2k_2 + \sqrt{3})$,

$\therefore RQ$ 的中点 $S(\frac{\sqrt{3}}{k_1} + 1, \sqrt{3} + k_2)$, 即 $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{k_1} + 1$, $y_0 = \sqrt{3} + k_2 = \sqrt{3} - \frac{3}{4k_1}$.

$\therefore$ 直线 IJ 的方程表示为： $3(\frac{\sqrt{3}}{k_1} + 1)x + 4(\sqrt{3} - \frac{3}{4k_1})y - 12 = 0$,

即 $\frac{\sqrt{3}}{k_1}(\sqrt{3}x - y) + 3x + 4\sqrt{3}y - 12 = 0$, 15 分

令 $\begin{cases} \sqrt{3}x - y = 0 \\ 3x + 4\sqrt{3}y - 12 = 0 \end{cases}$, 解得： $\begin{cases} x = \frac{4}{5} \\ y = \frac{4\sqrt{3}}{5} \end{cases}$, 16 分

$\therefore$ 直线 IJ 恒过定点 $N(\frac{4}{5}, \frac{4\sqrt{3}}{5})$, 又 $\because OT \perp IJ$,

$\therefore$ 点 T 在以 ON 为直径的圆上, 即 $K(\frac{2}{5}, \frac{2\sqrt{3}}{5})$, $|TK|$ 定值 $\frac{4}{5}$ 17 分