

2025年高考综合改革适应性演练

数学答案

一、单选题

1. (2025年1月八省联考数学) 已知集合 $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{0, 1, 4\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{0\}$ B. $\{1\}$ C. $\{0, 1\}$ D. $\{-1, 0, 1, 4\}$

【答案】C

【难度】0.94

【知识点】交集的概念及运算

【分析】由交集的运算求解即可;

【详解】由题意可得 $A \cap B = \{0, 1\}$.

故选: C.

2. (2025年1月八省联考数学) 函数 $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ 的最小正周期是 ()

- A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. π D. 2π

【答案】D

【难度】0.94

【知识点】求余弦(型)函数的最小正周期

【分析】根据三角函数最小正周期的求法求得正确答案.

【详解】依题意, $f(x)$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$.

故选: D

3. (2025年1月八省联考数学) $|2 - 4i| =$ ()

- A. 2 B. 4 C. $2\sqrt{5}$ D. 6

【答案】C

【难度】0.94

【知识点】求复数的模

【分析】根据复数模的概念直接求解.

【详解】由题意: $|z| = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$.

故选: C

4. (2025 年 1 月八省联考数学) 已知向量 $\vec{a}=(0,1), \vec{b}=(1,0)$, 则 $\vec{a} \cdot (\vec{a}-\vec{b})=$ ()

A. 2

B. 1

C. 0

D. -1

【答案】B

【难度】0.94

【知识点】平面向量线性运算的坐标表示、数量积的坐标表示

【分析】利用向量的坐标运算求解.

【详解】由 $\vec{a}=(0,1), \vec{b}=(1,0)$,

$$\therefore \vec{a}-\vec{b}=(-1,1),$$

$$\therefore \vec{a} \cdot (\vec{a}-\vec{b})=0 \times (-1)+1 \times 1=1.$$

故选: B.

5. (2025 年 1 月八省联考数学) 双曲线 $x^2-\frac{y^2}{9}=1$ 的渐近线方程为 ()

A. $y=\pm x$ B. $y=\pm 2x$ C. $y=\pm 3x$ D. $y=\pm 4x$

【答案】C

【难度】0.94

【知识点】已知方程求双曲线的渐近线

【分析】根据双曲线的标准方程, 结合渐近线方程, 可得答案.

【详解】由方程 $x^2-\frac{y^2}{9}=1$, 则 $a=1, b=3$, 所以渐近线 $y=\pm \frac{b}{a}x=\pm 3x$.

故选: C.

6. (2025 年 1 月八省联考数学) 底面直径和母线长均为 2 的圆锥的体积为 ()

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$ B. π C. 2π D. 3π

【答案】A

【难度】0.85

【知识点】锥体体积的有关计算

【分析】由勾股定理先求出圆锥的高, 进而利用圆锥体积公式求解即可.

【详解】由题可知圆锥的底面半径 $R=1$, 母线长 $l=2$, 高 $h=\sqrt{l^2-R^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$,

$$\therefore \text{圆锥的体积为 } V=\frac{1}{3}\pi R^2 h=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi.$$

故选: A.

7. (2025 年 1 月八省联考数学) 在 $\triangle ABC$ 中, $BC=8, AC=10, \cos \angle BAC = \frac{3}{5}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 ()

A. 6

B. 8

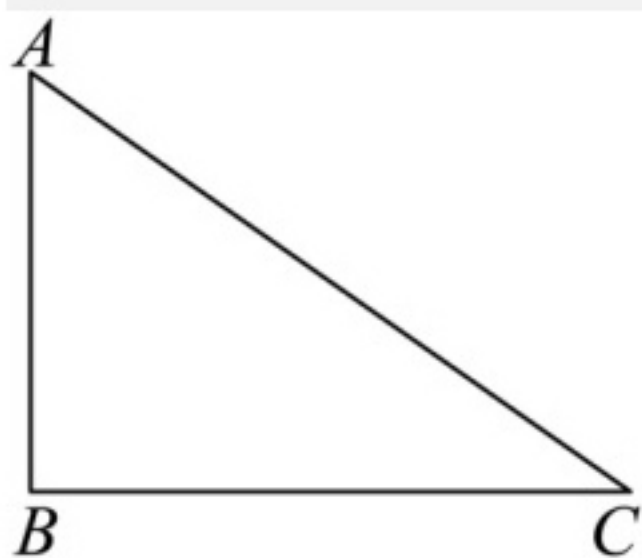
C. 24

D. 48

【答案】C

【难度】0.65

【知识点】三角形面积公式及其应用、余弦定理解三角形

【分析】先根据余弦定理求出 AB 边的长度, 再利用三角形面积公式求出三角形面积即可.【详解】设 $AB=x$, 根据余弦定理 $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos \angle BAC$,

已知 $BC=8, AC=10, \cos \angle BAC = \frac{3}{5}$, 代入可得:

$$8^2 = 10^2 + x^2 - 2 \times 10 \times x \times \frac{3}{5}, \text{ 即 } x^2 - 12x + 36 = 0, \text{ 解得 } x = 6,$$

由于 $BC^2 + AB^2 = 64 + 36 = 100 = AC^2$, 则 $\triangle ABC$ 为直角三角形,

$$\text{则 } S = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24.$$

故选: C.

8. (2025 年 1 月八省联考数学) 已知函数 $f(x) = x|x-a| - 2a^2$, 若当 $x > 2$ 时, $f(x) > 0$, 则 a 的取值范围是 ()

【答案】B

【难度】0.4

【知识点】解含有参数的一元二次不等式、分类讨论解绝对值不等式

【分析】分类讨论, 去掉绝对值, 结合一元二次不等式的求解即可得解.

$$\text{【详解】当 } a > 2, x > 2 \text{ 时, } f(x) = x|x-a| - 2a^2 = \begin{cases} x^2 - ax - 2a^2, & x \geq a \\ -x^2 + ax - 2a^2, & 2 < x < a \end{cases},$$

当 $2 < x < a$ 时, $f(x) = -x^2 + ax - 2a^2$, 此时 $\Delta = a^2 - 4 \times 2a^2 = -7a^2 < 0$,

所以 $f(x) < 0$, 不满足当 $x > 2$ 时, $f(x) > 0$, 故 $a > 2$ 不符合题意;

当 $0 < a \leq 2, x > 2$ 时, $f(x) = x|x-a| - 2a^2 = x^2 - ax - 2a^2 = (x-2a)(x+a) > 0$, 解得 $x > 2a$,

由于 $x > 2$ 时, $f(x) > 0$, 故 $2a \leq 2$, 解得 $0 < a \leq 1$;

当 $a = 0, x > 2$ 时, $f(x) = x^2 > 0$ 恒成立, 符合题意;

当 $a < 0, x > 2$ 时, $f(x) = x|x-a| - 2a^2 = x^2 - ax - 2a^2 = (x-2a)(x+a) > 0$, 解得 $x > -a$,

由于 $x > 2$ 时, $f(x) > 0$, 故 $-a \leq 2$, 解得 $-2 \leq a < 0$.

综上 $-2 \leq a \leq 1$.

故选: B

二、多选题

9. (2025 年 1 月八省联考数学) 已知 $F(2,0)$ 是抛物线 $C:y^2=2px$ 的焦点, M 是 C 上的点, O 为坐标原点. 则 ()

- A. $p=4$
- B. $|MF| \geq |OF|$
- C. 以 M 为圆心且过 F 的圆与 C 的准线相切
- D. 当 $\angle OFM=120^\circ$ 时, $\triangle OFM$ 的面积为 $2\sqrt{3}$

【答案】ABC

【难度】0.65

【知识点】抛物线定义的理解、根据抛物线方程求焦点或准线、抛物线中的三角形或四边形面积问题、直线与抛物线交点相关问题

【分析】根据焦点坐标求出 $p=4$ 判断 A, 根据抛物线定义判断 B, C, 应用已知联立方程求出点的坐标计算判断三角形的面积判断 D.

求出点的坐标计算判断三角形的面积判断 D.

【详解】因为 $F(2,0)$ 是抛物线 $C:y^2=2px$ 的焦点, 所以 $\frac{p}{2}=2$, 即得 $p=4$, A 选项正确;

设 $M(x_0, y_0)$ 在 $y^2=8x$ 上, 所以 $x_0 \geq 0$,

所以 $|MF|=x_0+\frac{p}{2} \geq \frac{p}{2}=|OF|$, B 选项正确;

因为以 M 为圆心且过 F 的圆半径为 $|MF|=x_0+2$ 等于 M 与 C 的准线的距离, 所以以 M 为圆心且过 F 的圆与 C 的准线相切, C 选项正确;

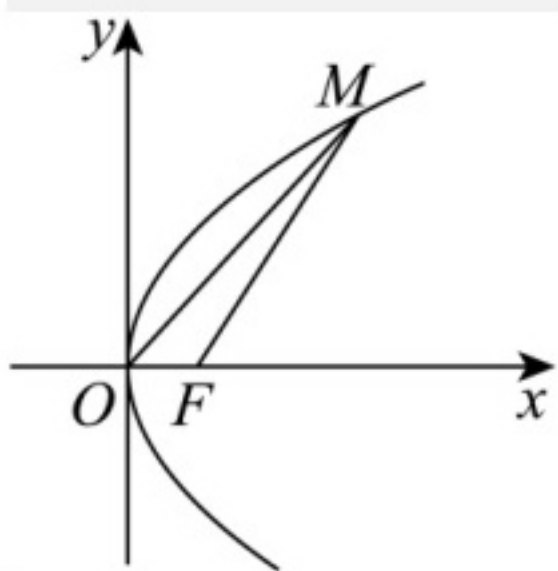
当 $\angle OFM=120^\circ$ 时, $x_0 > 2$,

$\frac{y_0}{x_0-2}=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$, 且 $y_0^2=8x_0$, $y_0 > 0$,

所以 $\sqrt{3}y_0^2-8y_0-16\sqrt{3}=0$, $y_0=4\sqrt{3}$ 或 $y_0=-\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 舍

所以 $\triangle OFM$ 的面积为 $S_{\triangle OFM}=\frac{1}{2}|OF|\times|y_0|=4\sqrt{3}$, D 选项错误.

故选: ABC.



10. (2025 年 1 月八省联考数学) 在人工神经网络中, 单个神经元输入与输出的函数关系可

以称为激励函数. 双曲正切函数是一种激励函数. 定义双曲正弦函数 $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, 双曲

余弦函数 $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, 双曲正切函数 $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$. 则 ()

A. 双曲正弦函数是增函数

B. 双曲余弦函数是增函数

C. 双曲正切函数是增函数

D. $\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$

【答案】ACD

【难度】0.65

【知识点】用导数判断或证明已知函数的单调性、函数新定义

【分析】对 A、B: 借助导数求导后即可得; 对 C: 借助双曲正弦函数与双曲余弦函数将双曲正切函数化简后, 结合指数函数性质即可得; 对 D: 借助双曲正弦函数与双曲余弦函数, 分别将等式左右两边化简即可得.

【详解】对 A: 令 $f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$,

则 $f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$ 恒成立, 故双曲正弦函数是增函数, 故 A 正确;

对 B: 令 $g(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$,

则 $g'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, 由 A 知, $g'(x)$ 为增函数, 又 $g'(0) = \frac{e^0 - e^0}{2} = 0$,

故当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $g'(x) < 0$, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$,

故 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故 B 错误;

对 C: $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1}$,

由 $y = e^{2x} + 1$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 且 $y = e^{2x} + 1 > 1$,

故 $\tanh x = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1}$ 是增函数, 故 C 正确;

对 D: 由 C 知 $\tanh x = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$, 则 $\tanh(x+y) = \frac{e^{2x+2y} - 1}{e^{2x+2y} + 1}$,

$$\begin{aligned} \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y} &= \frac{\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} + \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}}{1 + \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \cdot \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}} = \frac{(e^{2x} - 1)(e^{2y} + 1) + (e^{2y} - 1)(e^{2x} + 1)}{(e^{2x} + 1)(e^{2y} + 1) + (e^{2x} - 1)(e^{2y} - 1)} \\ &= \frac{e^{2x+2y} + e^{2x} - e^{2y} - 1 + e^{2x+2y} - e^{2x} + e^{2y} - 1}{e^{2x+2y} + e^{2x} + e^{2y} + 1 + e^{2x+2y} - e^{2x} - e^{2y} + 1} = \frac{2e^{2x+2y} - 2}{2e^{2x+2y} + 2} = \frac{e^{2x+2y} - 1}{e^{2x+2y} + 1}, \end{aligned}$$

故 $\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$, 故 D 正确.

故选: ACD.

11. (2025 年 1 月八省联考数学) 下面四个绳结中, 不能无损伤地变为图中的绳结的有

(ABD)



A.



B.



C.



D.



三、填空题

12. (2025 年 1 月八省联考数学) 已知函数 $f(x) = a^x (a > 0, a \neq 1)$, 若 $f(\ln 2)f(\ln 4) = 8$, 则

$a =$ _____.

【答案】e

【难度】0.85

【知识点】指数幂的运算、对数的运算

【分析】根据条件, 利用指数和对数的运算求得答案.

【详解】由 $f(\ln 2)f(\ln 4) = 8$, 可得 $a^{\ln 2} \cdot a^{\ln 4} = 8$,

即 $a^{\ln 2 + \ln 4} = a^{3\ln 2} = 8$, 也即 $(a^{\ln 2})^3 = 2^3$,

$\because a > 0$ 且 $a \neq 1$, $\therefore a^{\ln 2} = 2$,

两边取对数得: $\ln 2 \cdot \ln a = \ln 2$, 解得 $a = e$.

故答案为: e.

13. (2025 年 1 月八省联考数学) 有 8 张卡片, 分别标有数字 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 现从这 8 张卡片中随机抽出 3 张, 则抽出的 3 张卡片上的数字之和与其余 5 张卡片上的数字之和相等的概率为_____.

【答案】 $\frac{3}{56}$

【难度】 0.85

【知识点】 实际问题中的组合计数问题、计算古典概型问题的概率

【分析】 先写出基本事件总数 C_8^3 , 再求出所有卡片上的数字之和, 得到抽出的 3 张卡片上的数字之和应为 18, 列举出和为 18 的 3 张卡片即可求解.

【详解】 从 8 张卡片中随机抽出 3 张, 则样本空间中总的样本点数为 $C_8^3 = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} = 56$,

因为 $1+2+3+4+5+6+7+8=36$,

所以要使抽出的 3 张卡片上的数字之和与其余 5 张卡片上的数字之和相等,

则抽出的 3 张卡片上的数字之和应为 18,

则抽出的 3 张卡片上的数字的组合有 8, 7, 3 或 8, 6, 4 或 7, 6, 5 共 3 种,

所以符合抽出的 3 张卡片上的数字之和为 18 的样本点个数共 3 个,

所以抽出的 3 张卡片上的数字之和与其余 5 张卡片上的数字之和相等的概率为 $\frac{3}{56}$.

故答案为: $\frac{3}{56}$.

14. (2025 年 1 月八省联考数学) 已知曲线 $C: y = x^3 - \frac{2}{x}$, 两条直线 l_1 、 l_2 均过坐标原点 O , l_1 和 C 交于 M 、 N 两点, l_2 和 C 交于 P 、 Q 两点, 若三角形 $\triangle OPM$ 的面积为 $\sqrt{2}$, 则三角形 $\triangle MNQ$ 的面积为_____.

【答案】 $2\sqrt{2}$

【难度】 0.65

【知识点】 函数奇偶性的应用、函数对称性的应用、函数图象的应用、根据解析式直接判断函数的单调性

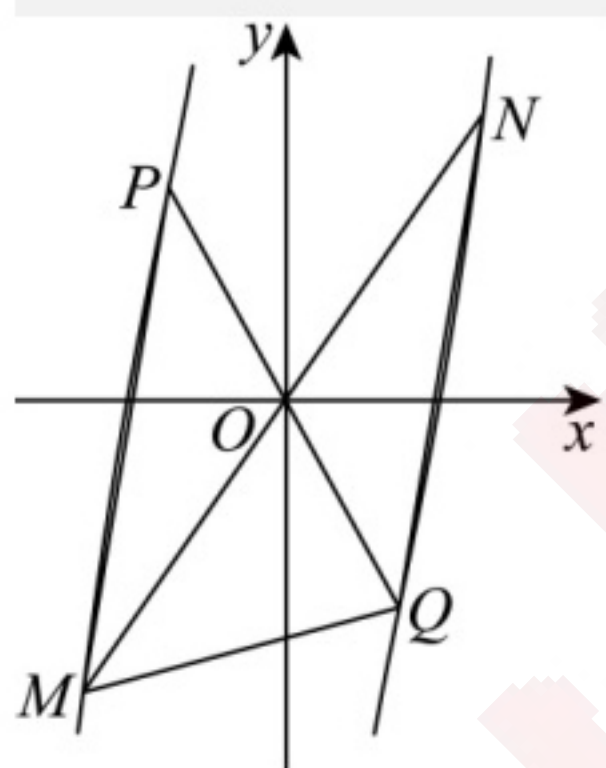
【分析】 根据对称性, 结合图象来求得正确答案.

【分析】 根据对称性, 结合图象来求得正确答案.

【详解】 由于 (x, y) 和 $(-x, -y)$ 都符合 $y = x^3 - \frac{2}{x}, x \neq 0$,

所以曲线 C 的图象关于原点对称, 当 $x > 0$ 时, 函数 $y = x^3 - \frac{2}{x}$ 单调递增,

由此画出曲线 C 的大致图象如下图所示,



两条直线 l_1 、 l_2 均过坐标原点 O , 所以 M 、 N 两点关于原点对称, P 、 Q 两点关于原点对称, 根据对称性, 不妨设 M, N, P, Q 位置如图,

可知 $|OP| = |OQ|, |OM| = |ON|, \angle POM = \angle QON$,

所以 $\triangle OPM \cong \triangle OQN$, 所以 $S_{\triangle OQN} = S_{\triangle OPM} = \sqrt{2}$,

而 $\triangle OQM$ 和 $\triangle OQN$ 等底等高, 面积相同, 所以 $S_{\triangle OQM} = \sqrt{2}$,

所以 $S_{\triangle MNQ} = 2\sqrt{2}$.

故答案为: $2\sqrt{2}$

【点睛】 方法点睛: 利用曲线对称性: 充分利用曲线关于原点对称的性质, 确定点的对称关系, 这是解决本题的基础. 通过对称关系, 能够推导出相关线段和三角形之间的等量关系, 为后续的面积计算提供依据.

15. (2025 年 1 月八省联考数学) 为考察某种药物 A 对预防疾病 B 的效果, 进行了动物 (单位: 只) 试验, 得到如下列联表:

药物	疾病		合计
	未患病	患病	
未服用	100	80	s
服用	150	70	220
服用	150	70	220
合计	250	t	400

- (1)求 s, t ;
- (2)记未服用药物 A 的动物患疾病 B 的概率为 P , 给出 P 的估计值;
- (3)根据小概率值 $\alpha = 0.01$ 的独立性检验, 能否认为药物 A 对预防疾病 B 有效?

附: $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)},$

$P(\chi^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

【答案】(1) $s = 180, t = 150$

(2) $\frac{4}{9}$

(3)能认为药物 A 对预防疾病 B 有效

【难度】0.85

【知识点】完善列联表、卡方的计算、独立性检验解决实际问题、用频率估计概率

【分析】(1) 根据列联表求和即可;

(2) 用频率估计概率, 计算即可;

(3) 根据公式计算 χ^2 , 然后根据临界值表分析判断即可.

【详解】(1) 由列联表知 $s = 100 + 80 = 180, t = 80 + 70 = 150$;

(2) 由列联表知, 未服用药物 A 的动物有 $s = 180$ (只),

未服用药物 A 且患疾病 B 的动物有 80 (只),

所以未服用药物 A 的动物患疾病 B 的频率为 $\frac{80}{180} = \frac{4}{9},$

所以未服用药物 A 的动物患疾病 B 的概率的估计值为 $P = \frac{4}{9};$

(3) 零假设为 H_0 : 药物 A 对预防疾病 B 无效,

由列联表得到 $\chi^2 = \frac{400(100 \times 70 - 150 \times 80)^2}{180 \times 220 \times 250 \times 150} = \frac{2000}{297} \approx 6.734 > 6.635,$

根据小概率值 $\alpha = 0.01$ 的独立性检验, 推断 H_0 不成立,

即认为药物 A 对预防疾病 B 有效, 该推断犯错误的概率不超过 0.01,

所以根据小概率值 $\alpha = 0.01$ 的独立性检验, 能认为药物 A 对预防疾病 B 有效.

16. (2025 年 1 月八省联考数学) 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 3, a_{n+1} = \frac{3a_n}{a_n + 2}$

(1) 证明: 数列 $\left\{1 - \frac{1}{a_n}\right\}$ 为等比数列;

(2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(3) 令 $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, 证明: $b_n < b_{n+1} < 1$.

【难度】0.65

【知识点】判断数列的增减性、由递推关系式求通项公式、由递推关系证明等比数列

【分析】(1) 根据题设条件化简, 结合等比数列的定义即可证明;

(2) 由 (1) 求得数列 $\left\{1 - \frac{1}{a_n}\right\}$ 的通项公式, 再求 a_n 即得;

(3) 将 (2) 中得到的 $\{a_n\}$ 的通项代入 $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ 求得 b_n , 化简后利用数列的单调性即可得证.

【详解】(1) 由 $a_{n+1} = \frac{3a_n}{a_n + 2}$ 得 $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{a_n + 2}{3a_n} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{a_n} + \frac{1}{3}$,

$$\text{则 } 1 - \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{a_n} = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{a_n}\right),$$

所以数列 $\left\{1 - \frac{1}{a_n}\right\}$ 是首项为 $1 - \frac{1}{a_1} = \frac{2}{3}$, 公比为 $\frac{2}{3}$ 的等比数列.

(2) 由 (1) 得 $1 - \frac{1}{a_n} = \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$,

$$\text{解得: } a_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{3^n}{3^n - 2^n}.$$

$$(3) \quad b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}}{3^{n+1} - 2^{n+1}} \cdot \frac{3^n - 2^n}{3^n} = \frac{3(3^n - 2^n)}{3^{n+1} - 2^{n+1}} = \frac{3\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n - 3\right)}{3\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n - 2\right)} = \frac{3\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n - 2 - 1\right)}{3\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n - 2\right)} = 1 - \frac{1}{3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n - 2}.$$

$$\text{令 } f(n) = 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n - 2, \quad n \in [1, +\infty),$$

因为 $f(n) = 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n - 2$ 在 $n \in [1, +\infty)$ 上单调递增, 则 $f(n) \geq f(1) = 3 \times \frac{3}{2} - 2 = \frac{5}{2} > 0$

所以数列 $\left\{\frac{1}{3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n - 2}\right\}$ 在 $n \in \mathbb{N}^*$ 上单调递减, 从而数列 $\{b_n\}$ 在 $n \in \mathbb{N}^*$ 上单调递增, 且 $b_n < 1$,

故得 $b_n < b_{n+1} < 1$.

17. (2025 年 1 月八省联考数学) 已知函数 $f(x) = a \ln x + \frac{b}{x} - x$.

(1) 设 $a=1, b=-2$, 求曲线 $y=f(x)$ 的斜率为 2 的切线方程;

(2) 若 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点, 求 b 的取值范围.

【答案】(1) $2x - y - 5 = 0$

(2) $b > 1$

【难度】0.65

【知识点】求在曲线上一点处的切线方程 (斜率)、根据极值点求参数

【分析】(1) 由切线斜率为 2, 结合导数知识可得切线过点 $(1, -3)$, 然后可得切线方程;

(2) 由 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点, 可得 $a=b+1$, 然后据此讨论 $f(x)$ 的单调性, 分析得 $f(x)$ 在 $x=1$ 时的极值情况, 从而得解.

【详解】(1) 当 $a=1, b=-2$ 时, $f(x) = \ln x - \frac{2}{x} - x$, 其中 $x > 0$,

则 $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - 1 = \frac{x - x^2 + 2}{x^2}$, 令 $f'(x) = 2 \Rightarrow \frac{x - x^2 + 2}{x^2} = 2$,

化简得 $3x^2 - x - 2 = (x-1)(3x+2) = 0$, 解得 $x=1$ (负值舍去),

又此时 $f(1) = -3$, 则切线方程过点 $(1, -3)$, 结合切线方程斜率为 2,

则切线方程为 $y+3=2(x-1)$, 即 $2x - y - 5 = 0$.

(2) 由题可得 $f(x)$ 定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{a}{x} - \frac{b}{x^2} - 1 = \frac{-x^2 + ax - b}{x^2}$,

因 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点, 则 $f'(1) = -1 + a - b = 0 \Rightarrow a = b+1$,

则 $f'(x) = \frac{-x^2 + (b+1)x - b}{x^2} = -\frac{(x-1)(x-b)}{x^2}$,

若 $b \leq 0$, 令 $f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (0, 1)$, 令 $f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (1, +\infty)$,

则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

得 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极大值点, 不满足题意;

若 $0 < b < 1$, 令 $f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (b, 1)$, 令 $f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (0, b) \cup (1, +\infty)$,

则 $f(x)$ 在 $(b, 1)$ 上单调递增, 在 $(0, b), (1, +\infty)$ 上单调递减,

得 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极大值点, 不满足题意;

若 $b=1$, 则 $f'(x) = -\frac{(x-1)^2}{x^2} < 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 无极值, 不满足题意;

若 $b > 1$, 令 $f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (1, b)$, 令 $f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (0, 1) \cup (b, +\infty)$,

则 $f(x)$ 在 $(1, b)$ 上单调递增, 在 $(0, 1), (b, +\infty)$ 上单调递减,

得 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点, 满足题意;

综上, $x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点时, $b > 1$.

18. (2025 年 1 月八省联考数学) 已知椭圆 C 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 左、右焦点分别为 $F_1(-1,0)$,

$F_2(1,0)$

(1) 求 C 的方程;

(2) 已知点 $M_0(1,4)$, 证明: 线段 F_1M_0 的垂直平分线与 C 恰有一个公共点;

(3) 设 M 是坐标平面上的动点, 且线段 F_1M 的垂直平分线与 C 恰有一个公共点, 证明 M 的轨迹为圆, 并求该圆的方程.

$$(1) \text{ 由题意知 } \begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \\ c = 1 \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = \sqrt{3} \end{cases} \therefore C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

$$(2) \text{ 设 } F_1M_0 \text{ 中点为 } P, \therefore P(0,2), k_{F_1M_0} = 2, \therefore F_1M_0 \text{ 的中垂线方程为 } y = -\frac{1}{2}x + 2$$

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 2 \\ 3x^2 + 4y^2 = 12 \end{cases} \Rightarrow 3x^2 + 4\left(-\frac{1}{2}x + 2\right)^2 = 12 \Rightarrow 3x^2 + 4\left(\frac{1}{4}x^2 - 2x + 4\right) = 12 \Rightarrow 4x^2 - 8x + 4 = 0 \text{ 即 } x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\therefore (x-1)^2 = 0 \therefore F_1M_0 \text{ 的垂直平分线与 } C \text{ 恰有一个公共点.}$$

$$\therefore F_1M \text{ 与 } C \text{ 公共点只有一个为 } \left(1, \frac{3}{2}\right)$$

$$(3) \text{ 设 } (x_0, y_0) \text{ 切线 } \frac{x_0x}{4} + \frac{y_0y}{3} = 1 \text{ (阅卷要求需要证明出来, 十二月第二周讲光学性质时}$$

我们讲过, 请回看视频或者笔记, 隐函数求导不得分、点斜式联立德尔塔等于零, 得 K 值, 再代回得切线方程, 为证, 超纲证扣三分, 我反复强调的, 高二高三的都给我注意点) 即

$$3x_0x + 4y_0y = 12 \quad F_1M: y = \frac{4y_0}{3x_0}(x+1) \text{ 即 } 3x_0y - 4y_0x = 4y_0$$

$$\therefore 9x_0^2x^2 + 16y_0^2y^2 + 24x_0y_0xy = 144 \therefore 9x_0^2y^2 + 16y_0^2x^2 - 24x_0y_0xy = 16y_0^2$$

$$\therefore (9x_0^2 + 16y_0^2)(x^2 + y^2) = 144 + 16y_0^2 \therefore \frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{3} = 1 \therefore 144 = 36x_0^2 + 48y_0^2$$

$$\therefore (9x_0^2 + 16y_0^2)(x^2 + y^2) = 36x_0^2 + 64y_0^2 \therefore x^2 + y^2 = 4$$

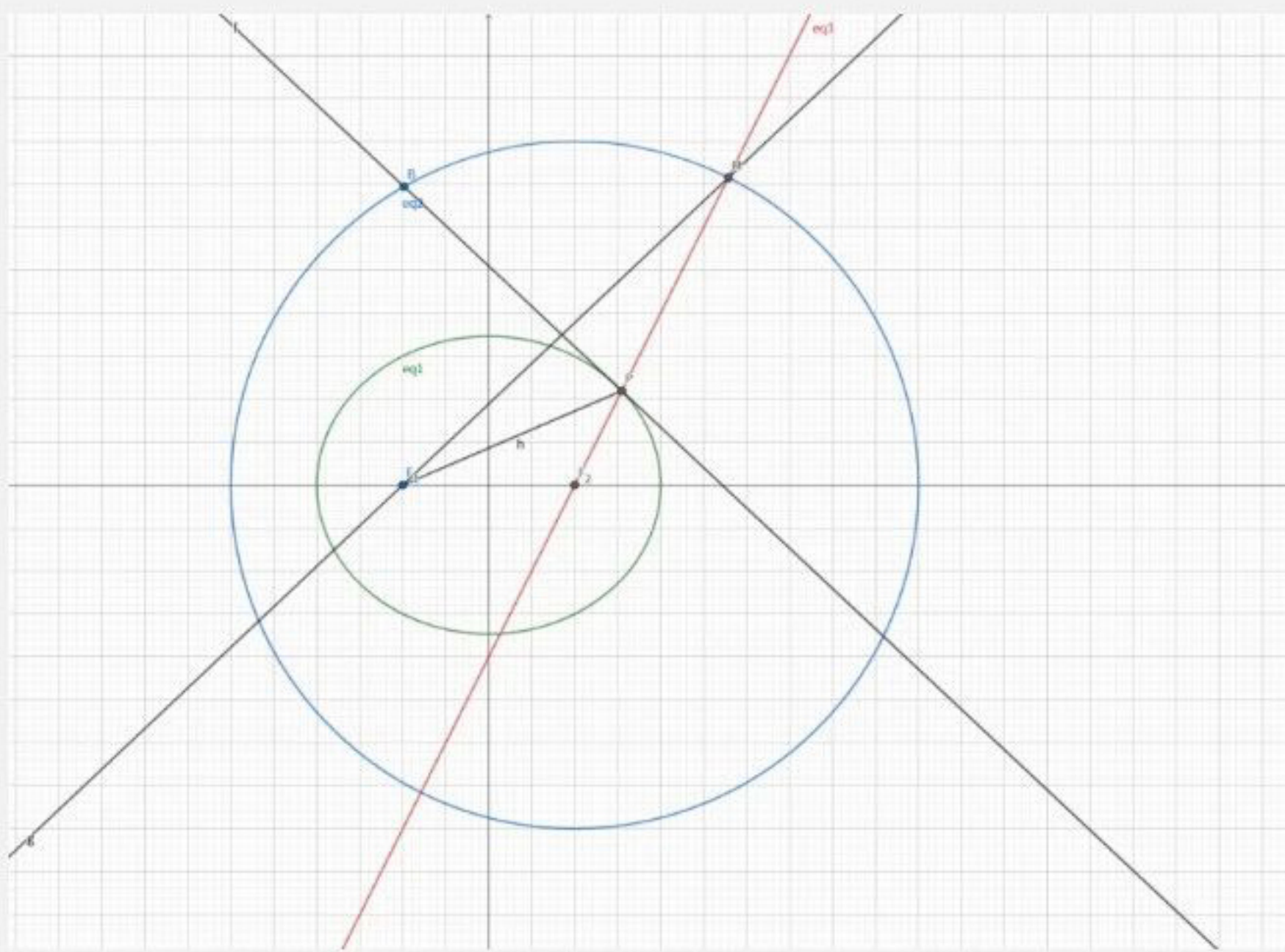
$$\therefore x_M = 2x_T + 1, y_M = 2y_T \quad \left(\frac{x_M-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_M}{2}\right)^2 = 4 \quad M \text{ 轨迹 } (x-1)^2 + y^2 = 16$$

MST 解法:

若 M, P, F_2 不共线, 设 M, A, F_2 共线 $MF_2 = MA + AF_2 = AF_1 + AF_2 > 2a$

$MP + PF_2 = PF_1 + PF_2 = 2a$ (中垂线性质) 则 $MP + PF_2 < MF_2$ (矛盾).

$$\therefore M, P, F_2 \text{ 共线 } \therefore M \text{ 轨迹 } (x-1)^2 + y^2 = 16$$



19. (2025年1月八省联考数学) 在平面四边形 $ABCD$ 中, $AB = AC = CD = 1$, $\angle ADC = 30^\circ$, $\angle DAB = 120^\circ$, 将 $\triangle ACD$ 沿 AC 翻折至 $\triangle ACP$, 其中 P 为动点.

(1) 设 $PC \perp AB$, 三棱锥 $P-ABC$ 的各个顶点都在球 O 的球面上.

(i) 证明: 平面 $PAC \perp$ 平面 ABC ;

(ii) 求球 O 的半径

(2) 求二面角 $A-CP-B$ 的余弦值的最小值.

解: $\because PC \perp AB, AB \perp AC \therefore AB \perp$ 面 $PAC \therefore$ 面 $ABC \perp$ 面 PAC

找 $\triangle ACP$ 的外心 O' , 易知 $O'P = O'A = 1$ 过 O 作面 ACP 垂线

设外接球球心为 O 由 $OB = OA$ 可知, $OO' = \frac{1}{2}, \therefore R = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$B(1,0,0), C(0,1,0), P(x,y,z) \because PA = \sqrt{3}, \therefore x^2 + y^2 + z^2 = 3$

又 $\because PC = 1, \therefore x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1 \therefore y = \frac{3}{2}, x^2 + z^2 = \frac{3}{4}$

面 ACP 法向量为 $\vec{n}_1 = (z, 0, -x)$ 面 BCP 法向量 $\vec{n}_2 = (z, z, x - y + 1)$

$\therefore \cos \theta = \frac{x^2 + z^2 + xy - x}{\sqrt{x^2 + z^2} \cdot \sqrt{z^2 + 2xy - 2x - 2y + 4}} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{2}x}{\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{-x^2 + x + \frac{7}{4}}}$ 右端求导可知, 当 $x = -\frac{1}{2}$ 时, $\cos \theta$ 最小

$\therefore \cos \theta \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$, 当 P 转到 $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 时取得最小值