

2025 届高三数学试题参考答案

1. D $|z| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$.

2. C $A = \{x | x^2 - 4x + 3 = 0\} = \{1, 3\}$, B 中最多只有 2 个元素. 又因为 $A \subseteq B$, 所以 $A = B$, 所以 $a = (1-2)^2 = 1$.

3. C $f(x)$ 的最大值为 1, 则 $g(x)$ 的最大值为 2.

4. A $f(1) = 2$, 因为 $f'(x) = 6x^2 + \frac{1}{x} - 1$, 所以 $f'(1) = 6$, 所求的切线方程为 $y - 2 = 6(x - 1)$, 即 $y = 6x - 4$.

5. C 因为 $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, 所以 $0 < \alpha + \beta < \pi$, $0 < \beta - \alpha < \frac{\pi}{2}$.

$$\text{因为 } \cos(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{5}}{5}, \cos(\beta - \alpha) = \frac{11\sqrt{5}}{25}, \text{ 所以 } \sin(\alpha + \beta) = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \sin(\beta - \alpha) = \frac{2\sqrt{5}}{25},$$

$$\text{所以 } \sin 2\beta = \sin[(\alpha + \beta) + (\beta - \alpha)] = \sin(\alpha + \beta)\cos(\beta - \alpha) + \cos(\alpha + \beta)\sin(\beta - \alpha)$$

$$= \frac{2\sqrt{5}}{5} \times \frac{11\sqrt{5}}{25} + \frac{\sqrt{5}}{5} \times \frac{2\sqrt{5}}{25} = \frac{24}{25}.$$

6. B 取 AB 的中点 E , 连接 PE (图略), 则 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = (\overrightarrow{PE} + \overrightarrow{EA}) \cdot (\overrightarrow{PE} + \overrightarrow{EB}) = \overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{PE}^2 - \overrightarrow{EA}^2 = \overrightarrow{PE}^2 - 1$.

$$|\overrightarrow{PE}|_{\min} = 2, \text{ 所以 } (\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB})_{\min} = 2^2 - 1 = 3.$$

7. C 由题意可得, 圆锥底面圆的直径为 4, 圆锥外接球的大圆为圆锥轴截面的外接圆, 由正弦

定理知圆锥轴截面的外接圆半径 (即球的半径) 为 $\frac{9\sqrt{2}}{4}$, 所以该圆锥外接球的表面积为 $4\pi \times$

$$\left(\frac{9\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{81\pi}{2}.$$

8. B 由题意, 各图中所含小正方形和小长方形的总个数分别为

$$1 + 4,$$

$$1 + 4 + 4 \times 2,$$

$$1 + 4 + 4 \times 2 + 4 \times 3,$$

.....

归纳可得, 第 n 个图案中的小正方形和小长方形的总个数为 $1 + 4 + 4 \times 2 + 4 \times 3 + \cdots + 4n = 1$

$$+ 4 \times \frac{(1+n)n}{2} = 2n^2 + 2n + 1, \text{ 故第 10 个图案中的小正方形和小长方形共有 221 个.}$$

9. AD 不妨设 $x_1 \leq x_2 \leq x_3, x_1' \leq x_2' \leq x_3'$. 因为这 2 组数据的中位数相同, 所以 $x_2 = x_2'$. 因为这 2 组数据的平均数相同, 所以 $x_1 + x_3 = x_1' + x_3'$ ①. 因为这 2 组数据的极差相同, 所以 $x_3 - x_1 = x_3' - x_1'$ ②. 由①②可得 $x_1 = x_1', x_3 = x_3'$, 所以这 2 组数据相同, 这 2 组数据的方

差也一定相等, A 正确. 若这 2 组数据分别为 1, 2, 6 和 0, 4, 5, 则这 2 组数据的平均数、方差、极差均相等, 中位数不相等, D 正确.

10. BCD $f(0)$ 不一定为 0, A 错误. 因为 $f(x)$ 不是奇函数, 所以 $\exists x \in \mathbf{R}, f(-x) \neq -f(x)$, B 正确. $f(x) = -|x| + 1$ 不是奇函数, 且 $f(-1) = -f(1)$, 符合题意, C 正确. $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2, & x \geq 0, \\ x, & x < 0 \end{cases}$ 不是奇函数, 且 $f(-1) = -f(1)$, 符合题意, D 正确.

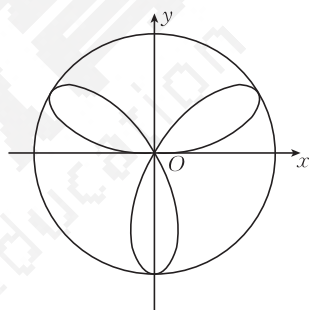
11. ABD 联立 $\begin{cases} 3x^2y - y^3 = (x^2 + y^2)^2, \\ y = x, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = 0, \\ y = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = \frac{1}{2}, \\ y = \frac{1}{2}, \end{cases}$ 所以直线 $y = x$ 与 C 只有 2 个公共点, A 正确.

因为点 $P(x_0, y_0)$ 在 C 上, 且 $x_0 > 0, y_0 > 0$, 所以 $3x_0^2y_0 - y_0^3 =$

$(x_0^2 + y_0^2)^2 > 0$, 即 $\frac{y_0}{x_0} < \sqrt{3}$, B 正确.

联立 $\begin{cases} 3x^2y - y^3 = (x^2 + y^2)^2, \\ x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$ 化简得 $4y^3 - 3y + 1 = 4(y + 1)(y - \frac{1}{2})^2 = 0$, 解得 $y = -1$ 或 $y = \frac{1}{2}$. 若 $y = -1$, 则 $x = 0$, 若 $y =$

$\frac{1}{2}$, 则 $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以圆 $x^2 + y^2 = 1$ 与 C 有 3 个公共点, 如图所示, 所以 C 上的点到原点的距离的最大值即 C 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的交点到原点的距离的最大值, 最大值为 1, C 错误, D 正确.



12. 60 首先从 6 名志愿者中选 1 名去完成 A 工作, 方法数为 C_6^1 ; 然后从其余 5 名志愿者中选 2 名去完成 B 工作, 方法数为 C_5^2 ; 最后剩下的 3 名志愿者去完成 C 工作. 故不同的安排方法共有 $C_6^1 \cdot C_5^2 = 6 \times 10 = 60$ 种.

13. $\sqrt{5}$ 不妨取双曲线 C 的一条渐近线 $y = \frac{b}{a}x$, 联立 $\begin{cases} y = x^2 + 1, \\ y = \frac{b}{a}x, \end{cases}$ 得 $x^2 - \frac{b}{a}x + 1 = 0, \Delta = (\frac{b}{a})^2 - 4 = 0$, 即 $\frac{b^2}{a^2} = 4$, 所以 $e = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{5}$.

14. 2 令 $f(x) = x(x^2 - \pi x \cdot \sin x + \frac{\pi^2}{4}) = 0$. 显然 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的一个零点.

当 $x \neq 0$ 时, 令 $x^2 - \pi x \cdot \sin x + \frac{\pi^2}{4} = 0$, 则 $x^2 + \frac{\pi^2}{4} = \pi x \cdot \sin x$, 即 $\sin x = \frac{x^2 + \frac{\pi^2}{4}}{\pi x}$.

因为 $-1 \leq \sin x \leq 1$, 所以 $|\frac{x^2 + \frac{\pi^2}{4}}{\pi x}| \leq 1$, 即 $x^2 + \frac{\pi^2}{4} \leq \pi|x|$, 配方得 $(|x| - \frac{\pi}{2})^2 \leq 0$, 当 $|x| =$

$\frac{\pi}{2}$ 时,等号成立,所以当 $x = \pm \frac{\pi}{2}$ 时, $x^2 - \pi x \cdot \sin x + \frac{\pi^2}{4} = 0$, 故 $f(x)$ 共有 3 个零点, 分别为 $0, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$, 则 $g(x_1) + g(x_2) + \dots + g(x_n) = 2$.

15. 解: (1) 在 $\triangle ACD$ 中, $\cos C = \frac{AC^2 + CD^2 - AD^2}{2AC \cdot CD} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 3 分

在 $\triangle ABC$ 中, $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cos C} = \sqrt{10}$ 6 分

(2) 因为 $\tan B = 3$, 所以 $\cos B = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $\sin B = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ 8 分

在 $\triangle ABD$ 中, $AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cos B$, 解得 $AB = \sqrt{10}$ ($AB = -\frac{3\sqrt{10}}{5}$ 舍去).
..... 11 分

$\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2} AB \cdot BC \sin B = 6$ 13 分

16. 解: (1) 由题意得 $\begin{cases} b=3, \\ \frac{c}{a} = \frac{1}{2}, \\ a^2 = b^2 + c^2, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} b^2 = 9, \\ a^2 = 12, \end{cases}$

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} = 1$ 5 分

(2) 联立 $\begin{cases} \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} = 1, \\ x - 2y = 0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = -3, \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 3, \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$,

即 $D(3, \frac{3}{2})$ 8 分

$k_{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则直线 AB 的方程为 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + 3$, 即 $\sqrt{3}x - 2y + 6 = 0$ 10 分

$|AB| = \sqrt{21}$.

设点 D 到直线 AB 的距离为 d , $d = \frac{3\sqrt{3} + 3}{\sqrt{7}}$, 13 分

则 $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} |AB| \cdot d = \frac{9 + 3\sqrt{3}}{2}$ 15 分

17. (1) 证明: 在 $\triangle PCD$ 中, E 为 CD 的中点, 所以 $PE \perp CD$, $PE = \sqrt{3}CE$ 1 分

因为平面 $PDC \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PDC \cap$ 平面 $ABCD = CD$, $PE \subset$ 平面 PDC ,

所以 $PE \perp$ 平面 $ABCD$.

因为 $BE, AB \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $PE \perp BE$, $PE \perp AB$, $\angle PEB = 90^\circ$ 3 分

因为 $AB \perp PB$, $PE \cap PB = P$, $PE, PB \subset$ 平面 PBE , 所以 $AB \perp$ 平面 PBE .

因为 $BE \subset \text{平面 } PBE$, 所以 $AB \perp BE$, 所以 $\angle ABE = \angle BEC = 90^\circ$ 4 分

因为 $CE = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}BC$, 所以 $BE = \sqrt{BC^2 - CE^2} = \sqrt{3}CE$, 5 分

所以 $PE = BE$, $\triangle PBE$ 为等腰直角三角形. 6 分

(2) 解: 设 $DC = 2$, 以 E 为坐标原点, EB, EC, EP 所在直线分别为 $x,$

y, z 轴建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $P(0, 0, \sqrt{3})$,

$A(\sqrt{3}, -2, 0), D(0, -1, 0)$ 8 分

$\overrightarrow{PA} = (\sqrt{3}, -2, -\sqrt{3}), \overrightarrow{DP} = (0, 1, \sqrt{3})$ 9 分

易得平面 PDC 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$ 10 分

设平面 ADP 的法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z)$,

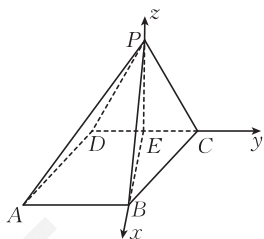
则 $\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{PA} = \sqrt{3}x - 2y - \sqrt{3}z = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{DP} = y + \sqrt{3}z = 0, \end{cases}$ 取 $y = \sqrt{3}$, 则 $\mathbf{m} = (1, \sqrt{3}, -1)$ 12 分

设二面角 $A-DP-C$ 的大小为 $\theta (0 \leq \theta \leq \pi)$,

$|\cos \theta| = |\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \left| \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} \right| = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 14 分

$\sin \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

故二面角 $A-DP-C$ 的正弦值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 15 分



18. (1) 证明: $M(1, 0), s(x) = \frac{e^x}{x-1}, s'(x) = \frac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}$.

当 $x \in (-\infty, 1) \cup (1, 2)$ 时, $s'(x) < 0$; 当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $s'(x) > 0$.

所以 $s(x)$ 在 $(-\infty, 1), (1, 2)$ 上单调递减, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增,

则 2 是 $s(x)$ 的极小值点,

故存在点 $P(2, e^2)$, 使得点 P 是 M 在 $f(x)$ 的“边界点”. 4 分

(2) 解: $M(0, 0), s(x) = \frac{\frac{1}{3}x^4 + ax^2}{x} = \frac{1}{3}x^3 + ax (x \neq 0), s'(x) = x^2 + a (x \neq 0)$.

因为不存在点 P , 使得点 P 是 M 在 $f(x)$ 的“边界点”, 所以 $s(x)$ 没有极值点.

若 $a \geq 0$, 则 $s'(x) > 0, s(x)$ 没有极值点.

若 $a < 0$, 则当 $x \in (-\infty, -\sqrt{-a}) \cup (\sqrt{-a}, +\infty)$ 时, $s'(x) > 0$,

当 $x \in (-\sqrt{-a}, 0) \cup (0, \sqrt{-a})$ 时, $s'(x) < 0$,

所以 $s(x)$ 在 $(-\sqrt{-a}, 0), (0, \sqrt{-a})$ 上单调递减, 在 $(-\infty, -\sqrt{-a}), (\sqrt{-a}, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $-\sqrt{-a}$ 是 $s(x)$ 的极大值点, $\sqrt{-a}$ 是 $s(x)$ 的极小值点.

综上, a 的取值范围为 $[0, +\infty)$ 8 分

(3)解: $M(0,0), s(x) = \frac{(x^2+ax)\ln x}{x} = (x+a)\ln x, s'(x) = \ln x + \frac{a}{x} + 1. \dots\dots\dots 9$ 分

因为存在两个不同的点 P , 使得点 P 是 M 在 $f(x)$ 的“边界点”, 所以 $s(x)$ 有 2 个极值点.

$\dots\dots\dots 10$ 分

令函数 $g(x) = \ln x + \frac{a}{x} + 1, g'(x) = \frac{x-a}{x^2}.$

若 $a \leq 0$, 则 $g'(x) > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $g(x)$ 最多只有 1 个零点, 即 $s'(x)$ 最多只有 1 个零点, 则 $s(x)$ 最多只有 1 个极值点, 不符合题意. $\dots\dots\dots 12$ 分

若 $a > 0$, 则当 $x \in (0, a)$ 时, $g'(x) < 0$, 当 $x \in (a, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$,

所以 $g(x)$ 在 $(0, a)$ 上单调递减, 在 $(a, +\infty)$ 上单调递增.

$g(x)_{\text{极小值}} = g(a) = \ln a + 2. \dots\dots\dots 13$ 分

要使得 $s(x)$ 有 2 个极值点, 则 $g(x)$ 有 2 个零点,

当 $g(x)_{\text{极小值}} \geq 0$ 时, 不符合题意. $\dots\dots\dots 14$ 分

当 $g(x)_{\text{极小值}} < 0$ 时, 由 $\ln a + 2 < 0$, 解得 $0 < a < e^{-2}. \dots\dots\dots 15$ 分

此时, $g(1) = a + 1 > 0$,

$g(a^2) = 2\ln a + \frac{1}{a} + 1$, 令函数 $h(a) = 2\ln a + \frac{1}{a} + 1, 0 < a < e^{-2}, h'(a) = \frac{2a-1}{a^2} < 0$,

所以 $h(a)$ 在 $(0, e^{-2})$ 上单调递减, $h(a) > h(e^{-2}) = e^2 - 3 > 0$, 即 $g(a^2) > 0$.

所以 $\exists x_1 \in (a^2, a), x_2 \in (a, 1), g(x_1) = g(x_2) = 0$,

当 $x \in (0, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ 时, $g(x) > 0$, 当 $x \in (x_1, x_2)$ 时, $g(x) < 0$,

所以 $s(x)$ 在 (x_1, x_2) 上单调递减, 在 $(0, x_1), (x_2, +\infty)$ 上单调递增.

所以 $s(x)$ 有 2 个极值点, 符合题意.

综上, a 的取值范围为 $(0, e^{-2}). \dots\dots\dots 17$ 分

19. 解: (1) 因为第 1 轮比赛甲、乙对打, 所以第 2 轮比赛甲、乙不可能对打, 则第 2 轮比赛甲只能和丙或丁对打.

因为第 3 轮比赛甲、丙对打, 所以第 2 轮比赛甲、丙不可能对打, 则第 2 轮比赛甲只能和丁对打.

第 2 轮比赛甲、丁对打的概率为 $\frac{1}{2}$.

若第 3 轮比赛甲、丙对打, 则第 2 轮比赛中甲胜丁, 丙胜乙, 或丁胜甲, 乙胜丙.

故所求概率为 $\frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \right) = \frac{2}{9}. \dots\dots\dots 4$ 分

(2) 设在第 n 轮比赛中, 甲、乙对打的概率为 a_n , 甲、丙对打的概率为 b_n , 甲、丁对打的概率为 $c_n, a_n + b_n + c_n = 1$ ①. $\dots\dots\dots 5$ 分

在第 $n+1$ 轮比赛中, 甲、乙对打的概率为 a_{n+1} , 甲、丙对打的概率为 b_{n+1} , 甲、丁对打的概率为 c_{n+1} ,

若在第 $n+1$ 轮比赛中,甲、乙对打,则在第 n 轮比赛中,甲、丙对打,乙、丁对打,
或者甲、丁对打,乙、丙对打,

所以 $a_{n+1} = \frac{5}{9}b_n + \frac{5}{9}c_n$ ②. 7 分

同理可得 $b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{4}{9}c_n$ ③, $c_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{4}{9}b_n$ ④. 8 分

由①②可得 $a_{n+1} = \frac{5}{9}(1-a_n)$, 即 $a_{n+1} - \frac{5}{14} = -\frac{5}{9}(a_n - \frac{5}{14})$, $a_1 - \frac{5}{14} = \frac{9}{14}$,

所以数列 $\{a_n - \frac{5}{14}\}$ 是以 $\frac{9}{14}$ 为首项, $-\frac{5}{9}$ 为公比的等比数列,

$a_n - \frac{5}{14} = \frac{9}{14}(-\frac{5}{9})^{n-1}$, $a_n = \frac{5}{14} + \frac{9}{14}(-\frac{5}{9})^{n-1}$ 11 分

③-④得 $b_{n+1} - c_{n+1} = \frac{4}{9}c_n - \frac{4}{9}b_n$, 设 $d_n = c_n - b_n$, 则 $-d_{n+1} = \frac{4}{9}d_n$ 13 分

因为 $d_1 = c_1 - b_1 = 0$, 所以 $d_n = c_n - b_n = 0$, 即 $c_n = b_n$.

$c_n = b_n = \frac{1}{2}(1-a_n) = \frac{9}{28} - \frac{9}{28}(-\frac{5}{9})^{n-1}$ 15 分

(3) 设在第 n 轮比赛中,甲获胜的概率为 A_n ,

$A_n = \frac{1}{2}a_n + \frac{2}{3}b_n + \frac{2}{3}c_n = \frac{17}{28} - \frac{3}{28}(-\frac{5}{9})^{n-1}$ 17 分

