2025届高三第一学期12月质量检测·数学

参考答案、提示及评分细则

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	A	C	D	C	D	A	B
题号	9	10	11					
答案	ABD	BC	ACD					

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1.【答案】B

【解析】由 $z=-i(1-3i)=-3-i$，可得复数 z 在复平面内所对应的点的坐标为 $(-3,-1)$，故选B．

2.【答案】A

【解析】由 $A=[0,2]$，$\complement_{\mathbf{R}}B=[1,3]$，可得 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=[1,2]$，故选A．

3.【答案】C

【解析】由 $y'=e^x-2a$，当 $x=0$ 时 $y=1$，有 $\frac{1-(-1)}{0-2}=1-2a$，可得 $a=1$，故选C．

4.【答案】D

【解析】设圆锥的底面半径为 r，母线长为 l，高为 h，有 $\pi rl=3\pi r^2$，可得 $l=3r$，有 $h=\sqrt{l^2-r^2}=\sqrt{9r^2-r^2}=2\sqrt{2}r$，由圆锥的体积为 $18\sqrt{2}\pi$，有 $\frac{1}{3}\pi r^2\times 2\sqrt{2}r=18\sqrt{2}\pi$，可得 $r=3$．故选D．

5.【答案】C

【解析】由 $\sqrt{2}(\sin x+\cos x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，因为 $0\leqslant x\leqslant\frac{11\pi}{12}$，有 $\frac{\pi}{4}\leqslant x+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{7\pi}{6}$，有 $-1\leqslant 2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 2$，有 $\frac{1}{4}\leqslant f(x)\leqslant 2$，故函数 $f(x)$ 的值域为 $\left[\frac{1}{4},2\right]$，故选C．

6.【答案】D

【解析】由 $\frac{c}{a}=\sqrt{5}$，有 $c=\sqrt{5}a$，$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{5a^2-a^2}=2a$，可得双曲线 C 的渐近线方程为 $2x-y=0$ 和 $2x+y=0$．圆 M 的标准方程为 $(x-2)^2+(y-1)^2=4$，点 $(2,1)$ 到直线 $2x+y=0$ 的距离为 $\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}>2$，可得直线 $2x+y=0$ 与圆 M 相离．点 $(2,1)$ 到直线 $2x-y=0$ 的距离为 $\frac{3}{\sqrt{5}}<2$，可得直线 $2x-y=0$ 与圆 M 相交，可得 $|AB|=2\sqrt{4-\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2}=\frac{2\sqrt{55}}{5}$．故选D．

7.【答案】A

【解析】由 $S_3=\frac{3(a_1+a_3)}{2}=3a_2=9$，$S_9=\frac{9(a_1+a_9)}{2}=9a_5=3$，有 $a_2=3$，$a_5=\frac{1}{3}$，$d=\frac{a_5-a_2}{3}=\frac{\frac{1}{3}-3}{3}=-\frac{8}{9}$，可得 $S_{16}=\frac{16(a_1+a_{16})}{2}=8(a_1+a_{16})=8(a_2+a_{15})=8(3+a_5+10d)=8\times\left(3+\frac{1}{3}-\frac{80}{9}\right)=-\frac{400}{9}$．故选A．

8.【答案】B

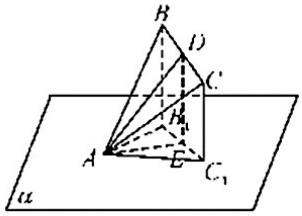
【解析】由题意知，函数 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称，函数的增区间为 $[0,+\infty)$，减区间为 $(-\infty,0)$，若对任意的 $x\in\mathbf{R}$，$f(m(2^x-2^{-x}))\leqslant f(4^x+4^{-x})$ 恒成立，有 $|m|\cdot|2^x-2^{-x}|\leqslant 4^x+4^{-x}$．若 $x=0$，不等式成立；若 $x\neq 0$，$|m|\leqslant\frac{4^x+4^{-x}}{|2^x-2^{-x}|}$ 恒成立，又由 $\frac{4^x+4^{-x}}{|2^x-2^{-x}|}=\frac{(2^x-2^{-x})^2+2}{|2^x-2^{-x}|}=|2^x-2^{-x}|+\frac{2}{|2^x-2^{-x}|}\geqslant 2\sqrt{|2^x-2^{-x}|\cdot\frac{2}{|2^x-2^{-x}|}}=2\sqrt{2}$ $\left(\text{当且仅当}|2^x-2^{-x}|=\sqrt{2}\text{时取等号，即}2^x=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\text{或}2^x=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)$，有 $|m|\leqslant 2\sqrt{2}$，可得实数 m 的取值范围为 $[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}]$．故选B．

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分．

9.【答案】ABD（全部选对得6分，选对1个得2分，选对2个得4分，有选错的得0分）

【解析】若直线过原点，直线方程为 $y=5x$；若直线的斜率为1，直线方程为 $y=x+4$；若直线的斜率为 -1，直线方程为 $y=6-x$．故直线方程为 $y=5x$ 或 $y=x+4$ 或 $y=6-x$．故选ABD．

10.【答案】BC(全部选对得 6 分,选对 1 个得 3 分,有选错的得 0 分)



【解析】对于 A 选项,由 $BB_1\perp\alpha,CC_1\perp\alpha,AB=AC=5,AB_1=3,AC_1=4$,可得 $BB_1=4,CC_1=3$,可得 BC 与 B_1C_1 不平行,故 BC 不平行于平面 α,故 A 选项错误;

对于 B 选项,由 $BB_1\perp B_1C_1,CC_1\perp B_1C_1,BB_1=4,CC_1=3,BC=\sqrt{10}$,可得 $B_1C_1=\sqrt{(\sqrt{10})^2-(4-3)^2}=3$,故 B 选项正确;

对于 C 选项,如图,过点 A 作 $AE\perp B_1C_1$,由 $AB_1=B_1C_1=3,AC_1=4$,有 $AE=\dfrac{AC_1\cdot\sqrt{AB_1^2-\frac{1}{4}AC_1^2}}{B_1C_1}=\dfrac{4\sqrt{9-\frac{1}{4}\times16}}{3}=\dfrac{4\sqrt5}{3}$,易知 $AE\perp$ 平面 BCC_1B_1,又由四边形 BCC_1B_1 的面积为 $\frac{1}{2}\times3\times(3+4)=\frac{21}{2}$,可得四棱锥 $A-BCC_1B_1$ 的体积为 $\frac{1}{3}\times\frac{4\sqrt5}{3}\times\frac{21}{2}=\frac{14\sqrt5}{3}$,故 C 选项正确;

对于 D 选项,取 BC 的中点 D,连接 AD,DE,由 $AB=AC=5,BC=\sqrt{10}$,有 $AD\perp BC,AD=\sqrt{AB^2-\frac{1}{4}BC^2}=\sqrt{5^2-\frac{1}{4}\times(\sqrt{10})^2}=\frac{3\sqrt{10}}{2}$,又由 $BC\perp AD,BC\perp AE$,可得 $BC\perp$ 平面 ADE,可得 $BC\perp DE$,故$\angle ADE$ 为平面 ABC 与平面 BCC_1B_1 的夹角,又由 $\sin\angle ADE=\dfrac{AE}{AD}=\dfrac{\frac{4\sqrt5}{3}}{\frac{3\sqrt{10}}{2}}=\dfrac{4\sqrt2}{9}$,故 D 选项错误.故选 BC.

11.【答案】ACD(全部选对得 6 分,选对 1 个得 2 分,选对 2 个得 4 分,有选错的得 0 分)

【解析】对于 A 选项,由 $a=2,b=1,c=\sqrt3$,可得 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt3}{2}$,故 A 选项正确;

对于 B 选项,由 $|PF_1|+|PF_2|=4,|PF_1|^2+|PF_2|^2=12$,可得 $|PF_1|\cdot|PF_2|=\frac{1}{2}[(|PF_1|+|PF_2|)^2-(|PF_1|^2+|PF_2|^2)]=\frac{1}{2}\times(16-12)=2$,故 B 选项错误;

对于 C 选项,设点 $P(m,n)$,有 $\frac{m^2}{4}+n^2=1$,又由 $A(2,0),B(0,1)$,直线 AP 的方程为 $y=\frac{n}{m-2}(x-2)$,令 $x=0$,可得点 N 的纵坐标为 $\frac{2n}{2-m}$,直线 BP 的方程为 $y=\frac{n-1}{m}x+1$,令 $y=0$,可得点 M 的横坐标为 $\frac{m}{1-n}$,有 $|AM|\cdot|BN|=\left|2-\frac{m}{1-n}\right|\cdot\left|1-\frac{2n}{2-m}\right|=\frac{(m+2n-2)^2}{|(m-2)(n-1)|}=\frac{m^2+4n^2+4+4mn-4m-8n}{|mn-m-2n+2|}=\frac{4(2+mn-m-2n)}{|mn-m-2n+2|}=4$,故 C 选项正确;

对于 D 选项,若 $MN/\!/AB$,由直线 AB 的斜率为 $-\frac{1}{2}$,有 $\dfrac{\frac{2n}{2-m}}{-\frac{m}{1-n}}=-\frac{1}{2}$,有 $4n^2-4n=m^2-2m$,代入 $4n^2=4-m^2$,有 $-2n=m^2-m-2$,有 $-2n=(m-2)(m+1)$,平方后有 $4n^2=(m-2)^2(m+1)^2$,代入 $4n^2=4-m^2$,有 $4-m^2=(m-2)^2\cdot(m+1)^2$,有 $(m-2)[(m-2)(m+1)^2+(m+2)]=0$,又由 $-2<m<0$,有 $m(m^2-2)=0$,可得 $m=-\sqrt2,n=-\frac{\sqrt2}{2}$,可得 $|OP|=\sqrt{(-\sqrt2)^2+\left(-\frac{\sqrt2}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$,故 D 选项正确.故选 ACD.

三、填空题:本题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分.

12.【答案及评分细则】$-\frac{\sqrt2}{3}$(5 分,其他结果均不得分)

【解析】由投影向量的定义有 $\lambda=\dfrac{\quad}{\ |^2}=\dfrac{2\times3\times\left(-\frac{\sqrt2}{2}\right)}{9}=-\dfrac{\sqrt2}{3}$.

13.【答案及评分细则】$-\frac{32}{7}$(5 分,其他结果均不得分)

【解析】由 $\tan2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{4}{1-4}=-\dfrac{4}{3}$,$\tan\beta=\tan[\alpha-(\alpha-\beta)]=\dfrac{\tan\alpha-\tan(\alpha-\beta)}{1+\tan\alpha\tan(\alpha-\beta)}=\dfrac{2-\frac{1}{2}}{1+2\times\frac{1}{2}}=\dfrac{3}{4}$,有 $\tan2\beta=\dfrac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}=\dfrac{2\times\frac{3}{4}}{1-\frac{9}{16}}=\dfrac{24}{7}$,可得 $\tan2\alpha\tan2\beta=-\dfrac{4}{3}\times\dfrac{24}{7}=-\dfrac{32}{7}$.

14.【答案及评分细则】$\frac{3}{2}e^{-\frac{1}{3}}$（5 分，其他结果均不得分）

【解析】由函数 $f(x)$ 的图象可知 $1<x_2\leqslant e,x_1^2=\ln x_2$，有 $\frac{3x_1^2+1}{x_2^2}=\frac{3\ln x_2+1}{x_2^2}$. 令 $g(x)=\frac{3\ln x+1}{x^2}(1<x\leqslant e)$，有 $g'(x)=\frac{1-6\ln x}{x^3}(1<x\leqslant e)$，令 $g'(x)>0$，有 $1<x<e^{\frac{1}{6}}$，可得函数 $g(x)$ 的减区间为 $(e^{\frac{1}{6}},e)$，增区间 $(1,e^{\frac{1}{6}})$，可得 $g(x)_{\max}=g(e^{\frac{1}{6}})=\frac{3\times\frac{1}{6}+1}{e^{\frac{1}{3}}}=\frac{3}{2}e^{-\frac{1}{3}}$. 故 $\frac{3x_1^2+1}{x_2^2}$ 的最大值为 $\frac{3}{2}e^{-\frac{1}{3}}$.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤.

15.【答案】(1) $\frac{\pi}{3}$　(2) $\sqrt{7}$

【解析及评分细则】(1)由题意及正弦定理，有 $\sin A\sin B+\sin B\sin A=2\sqrt{3}(\sin C-\sin A\cos B)$，

有 $\sin B\sin A=\sqrt{3}(\sin C-\sin A\cos B)$，………………………… 2 分

又由 $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，

有 $\sin B\sin A=\sqrt{3}\cos A\sin B$，………………………… 4 分

又由 $0<B<\pi$，有 $\sin B>0$，

可得 $\sin A=\sqrt{3}\cos A$. ………………………… 6 分

可得 $\tan A=\sqrt{3}$，

又由 $0<A<\pi$，可得 $A=\frac{\pi}{3}$；………………………… 7 分

(2)由正弦定理及 $\sin B=\frac{2}{3}\sin C$，有 $b=\frac{2}{3}c$，………………………… 8 分

又由△ABC 的面积为 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}c\times c\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{6}c^2$，………………………… 10 分

有 $\frac{\sqrt{3}}{6}c^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，可得 $c=3,b=2$，………………………… 11 分

由余弦定理，有 $a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}=\sqrt{2^2+3^2-12\times\frac{1}{2}}=\sqrt{7}$，

故 $a=\sqrt{7}$. ………………………… 13 分

16.【答案】(1)详见解析　(2) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

【解析及评分细则】(1)取 AB 的中点 Q，连接 PQ,DQ，………………………… 1 分

$\because AQ=BQ,A_1P=B_1P,\therefore AA_1\parallel PQ$，

$\because AA_1\parallel DD_1,AA_1\parallel PQ,\therefore DD_1\parallel PQ$，

$\because DD_1\parallel PQ,\therefore D,Q,P,D_1$ 四点共面，………………………… 3 分

$\because$ 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1,\therefore DD_1\perp$ 平面 $ABCD$，

$\because DD_1\perp$ 平面 $ABCD,AE\subset$ 平面 $ABCD,\therefore AE\perp DD_1$，………………………… 4 分

$\because AD=AB,BE=AQ,\angle DAQ=\angle ABE=\frac{\pi}{2},\therefore\triangle DAQ\cong\triangle ABE$，

$\because\triangle DAQ\cong\triangle ABE,\therefore\angle ADQ=\angle BAE$，

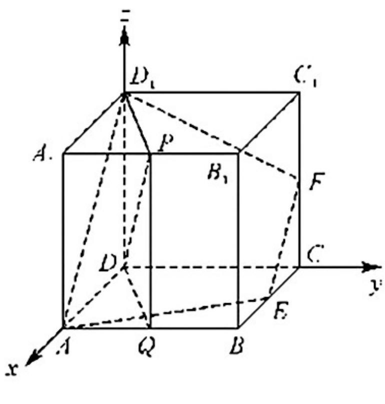
$\because\angle ADQ=\angle BAE,\therefore\angle ADQ+\angle DAE=\angle DAE+\angle BAE=\frac{\pi}{2}$，

$\because\angle ADQ+\angle DAE=\frac{\pi}{2},\therefore AE\perp DQ$，………………………… 6 分

$\because AE\perp DQ,AE\perp DD_1,DQ,DD_1\subset$ 平面 $DQPD_1,DQ\cap DD_1=D,\therefore AE\perp$ 平面 $DQPD_1$，

$\because AE\perp$ 平面 $DQPD_1,AE\subset$ 平面 $AEFD_1,\therefore$ 平面 $DPD_1\perp$ 平面 $AEFD_1$；……… 8 分

(2)由正方体的性质，以 D 为坐标原点，DA,DC,DD_1 分别为 x,y,z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，设 $AB=2$，可得 $D(0,0,0),A(2,0,0),D_1(0,0,2),E(1,2,0),P(2,1,2)$，………………………… 10 分



设平面 $AEFD_1$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，由 $\overrightarrow{AD_1}=(-2,0,2),\overrightarrow{AE}=(-1,2,0)$，

有 $\begin{cases}\overrightarrow{AD_1}\cdot\boldsymbol{n}=-2x+2z=0\\\overrightarrow{AE}\cdot\boldsymbol{n}=-x+2y=0\end{cases}$，取 $x=2,y=1,z=2$，可得平面 $AEFD_1$ 的一个法向量为

$\boldsymbol{n}=(2,1,2)$，…… 13 分

又由 $\overrightarrow{D_1P}=(2,1,0)$，有 $\overrightarrow{D_1P}\cdot\boldsymbol{n}=5$，$|\overrightarrow{D_1P}|=\sqrt{5}$，$|\boldsymbol{n}|=3$，有 $\cos\langle\overrightarrow{D_1P},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{5}{3\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，

所以直线 D_1P 与平面 $AEFD_1$ 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. …… 15 分

17.【答案】(1) $a_n=2^n$ 或 $a_n=(-3)^n$　(2) $T_n=(n-1)\cdot2^{n+1}+2$　(3) $c_n=(-1)^n-\dfrac{1}{2}\cdot(-3)^n$

【解析及评分细则】(1)设公比为 q，由 $a_1=a_1^2a_2$，有 $q^2=a_1^2$，可得 $q=a_1$ 或 $q=-a_1$，…… 1 分

①当 $q=a_1$ 时，由 $S_2=6$，有 $a_1+a_1q=6$，可得 $q^2+q-6=0$，解得 $q=-3$ 或 2，

故数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2^n$ 或 $a_n=(-3)^n$，…… 3 分

②当 $q=-a_1$ 时，由 $S_2=6$，有 $a_1+a_1q=6$，可得 $q^2+q+6=0$，方程无解，

由上知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2^n$ 或 $a_n=(-3)^n$；…… 5 分

(2)由 $a_1>0$，有 $a_n=2^n$，可得 $b_n=n\cdot2^n$，…… 6 分

有 $T_n=1\cdot2+2\cdot2^2+3\cdot2^3+\cdots+(n-1)\cdot2^{n-1}+n\cdot2^n$，

两边乘以 2，有 $2T_n=1\cdot2^2+2\cdot2^3+3\cdot2^4+\cdots+(n-1)\cdot2^n+n\cdot2^{n+1}$，

两式作差，有 $-T_n=2+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{n-1}+2^n-n\cdot2^{n+1}$，…… 8 分

有 $T_n=n\cdot2^{n+1}-\dfrac{2\cdot(1-2^n)}{1-2}=(n-1)\cdot2^{n+1}+2$；…… 10 分

(3)由 $a_1<0$，有 $a_n=(-3)^n$，可得 $c_n+c_{n+1}=(-3)^n$，

有 $c_{n+1}=-c_n+\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\right)(-3)^n$，有 $c_{n+1}-\dfrac{3}{2}\cdot(-3)^n=-c_n-\dfrac{1}{2}\cdot(-3)^n$，

有 $c_{n+1}+\dfrac{1}{2}\cdot(-3)^{n+1}=-\left[c_n+\dfrac{1}{2}\cdot(-3)^n\right]$，…… 13 分

可得数列 $\left\{c_n+\dfrac{1}{2}\cdot(-3)^n\right\}$ 是公比为 -1 的等比数列，

又由 $c_1+\dfrac{1}{2}\cdot(-3)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}=-1$，有 $c_n+\dfrac{1}{2}\cdot(-3)^n=(-1)^n$，

可得数列 $\{c_n\}$ 的通项公式为 $c_n=(-1)^n-\dfrac{1}{2}\cdot(-3)^n$. …… 15 分

18.【答案】(1) $(-\infty,-1)$　(2) $(1,+\infty)$

【解析及评分细则】(1)由 $f'(x)=a\ln x+\dfrac{ax+1}{x}-a-1=a\ln x+\dfrac{1}{x}-1=a\ln x+\dfrac{1-x}{x}$，…… 1 分

有 $f'(1)=0$，…… 2 分

当 $0<x<1$ 时，有 $\ln x<0$，$1-x>0$，又由 $a<0$，有 $a\ln x>0$，可得 $f'(x)>0$，

当 $x>1$ 时，有 $\ln x>0$，$1-x<0$，又由 $a<0$，有 $a\ln x<0$，可得 $f'(x)<0$，

可得当 $a<0$ 时，函数 $f(x)$ 的减区间为 $(1,+\infty)$，增区间为 $(0,1)$，…… 4 分

若函数 $f(x)$ 有两个零点，必有 $f(1)=-a-1>0$，可得 $a<-1$，…… 5 分

又由 $f(\mathrm{e})=a\mathrm{e}+1-(a+1)\mathrm{e}=1-\mathrm{e}<0$，可得函数 $f(x)$ 在 $(1,\mathrm{e})$ 上有一个零点，…… 6 分

令 $g(x)=x\ln x-x(0<x<1)$，有 $g'(x)=\ln x<0$，可知函数 $g(x)$ 单调递减，有 $-1<g(x)<0$，可得当 $0<x<1$ 且 $a<0$ 时，$0<a(x\ln x-x)<-a$，

当 $0<x<\mathrm{e}^a$ 时，有 $0<\mathrm{e}^a<1$，又由 $f(x)=a(x\ln x-x)-x+\ln x<-a-x+\ln x<-a+\ln x<-a+\ln\mathrm{e}^a=-a+a=0$，可知函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上有一个零点，

由上知，若函数 $f(x)$ 有两个零点，可得实数 a 的取值范围为 $(-\infty,-1)$；…… 9 分

(2)由(1)知，当 $a<0$ 时，$x=1$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点，不合题意，若 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点，必有 $a>0$，…… 10 分

由 $f'(x)=a\ln x+\dfrac{1}{x}-1$，令 $h(x)=a\ln x+\dfrac{1}{x}-1$，有 $h'(x)=\dfrac{a}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{ax-1}{x^2}$，…… 11 分

①当 $a=1$ 时，$h'(x)=\dfrac{x-1}{x^2}$，易知函数 $h(x)$ 的减区间为 $(0,1)$，增区间为 $(1,+\infty)$，可得 $h(x)\geqslant h(1)=0$，此时函数 $f(x)$ 单调递增，$x=1$ 不是函数 $f(x)$ 的极小值点，…… 13 分

②当 $a>1$ 时，易知函数 $h(x)$ 的减区间为 $\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$，增区间为 $\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$，由 $\dfrac{1}{a}<1$，$h(1)=0$，可得当 $\dfrac{1}{a}<x<1$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，可得当 $\dfrac{1}{a}<x<1$ 时，函数 $f(x)$ 单调递减，当 $x>1$ 时，函数 $f(x)$ 单调递增，可得 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点，…… 15 分

③当 $0<a<1$ 时，易知函数 $h(x)$ 的减区间为 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$，增区间为 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$，由 $\frac{1}{a}>1$，$h(1)=0$，可得当 $1<x<\frac{1}{a}$ 时，$f'(x)<0$；当 $0<x<1$ 时，$f'(x)>0$，可得当 $1<x<\frac{1}{a}$ 时，函数 $f(x)$ 单调递减，当 $0<x<1$ 时，函数 $f(x)$ 单调递增，可得 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点，微信搜《高三答案公众号》

由上知，若 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点，则实数 a 的取值范围为 $(1,+\infty)$. …………………………………… 17 分

19.【答案】(1)详见解析　(2)(i) $d=\sqrt{y_0^2+4p^2}$　(ii)详见解析

【解析及评分细则】(1)由题意有，点 $M(t,y_0)$，设直线 MA，MB 的斜率分别为 k_1，k_2 $(k_2>0>k_1)$，

直线 MA 的方程为 $y-y_0=k_1(x-t)$，代入 $x=\frac{y^2}{2p}$，有 $y-y_0=k_1\left(\frac{y^2}{2p}-t\right)$，整理为 $k_1y^2-2py+2py_0-2ptk_1=0$，…………………………………… 2 分

有 $\begin{cases}k_1\neq 0\\ \Delta=4p^2-4k_1(2py_0-2ptk_1)=0\end{cases}$，有 $2tk_1^2-2y_0k_1+p=0$，

同理有 $2tk_2^2-2y_0k_2+p=0$，可得 k_1，k_2 是关于 x 的方程 $2tx^2-2y_0x+p=0$ 的两个根，

有 $k_1+k_2=\frac{y_0}{t}$，$k_1k_2=\frac{p}{2t}$，…………………………………… 4 分

又由 $y_1=\frac{2p}{2k_1}=\frac{p}{k_1}$，同理有 $y_2=\frac{p}{k_2}$，

有 $y_1+y_2=\frac{p}{k_1}+\frac{p}{k_2}=\frac{p(k_1+k_2)}{k_1k_2}=\frac{\frac{py_0}{t}}{\frac{p}{2t}}=2y_0$，

故 y_1，y_0，y_2 成等差数列；…………………………………… 6 分

(2)(i)若 $t=-2p$，有 $k_1k_2=\frac{p}{-4p}=-\frac{1}{4}$，可得 $y_1y_2=\frac{p^2}{k_1k_2}=-4p^2$，…………………… 7 分

有 $d=\frac{1}{2}(y_2-y_1)=\frac{1}{2}\sqrt{(y_2-y_1)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(y_2+y_1)^2-4y_1y_2}=\frac{1}{2}\sqrt{4y_0^2+16p^2}=\sqrt{y_0^2+4p^2}$，

故有 $d=\sqrt{y_0^2+4p^2}$；…………………………………… 10 分

(ii)由(i)有 $d^2=y_0^2+4p^2$，

又由 d 为正整数，p 为正整数，y_0 为正奇数，且 y_0，d，p 这三个数两两之间的最大公约数都为 1，可得 d 为奇数，…………………………………… 11 分

方程 $d^2=y_0^2+4p^2$ 可化为 $4p^2=d^2-y_0^2$，可化为 $4p^2=(d+y_0)(d-y_0)$，可化为 $p^2=\frac{d+y_0}{2}\times\frac{d-y_0}{2}$，…………… 12 分

由 d，y_0 为奇数，可得 $\frac{d+y_0}{2}$ 和 $\frac{d-y_0}{2}$ 都为整数，设 $\frac{d+y_0}{2}$ 和 $\frac{d-y_0}{2}$ 的最大公约数为 λ，可得 λ 是 $d=\frac{d+y_0}{2}+\frac{d-y_0}{2}$ 和 $y_0=\frac{d+y_0}{2}-\frac{d-y_0}{2}$ 的因数，又由 d，y_0 的最大公约数为 1，可得 $\lambda=1$，…………………… 14 分

因为 $\frac{d+y_0}{2}$ 和 $\frac{d-y_0}{2}$ 的最大公约数为 1，p^2 为一个整数的平方，可得 $\frac{d+y_0}{2}$ 和 $\frac{d-y_0}{2}$ 都是一个整数的平方，不妨设 $\frac{d+y_0}{2}=r^2$，$\frac{d-y_0}{2}=s^2$（其中 r，s 都为正整数，$r>s$），可得 $d=r^2+s^2$，

故 d 一定可以表示为某两个正整数的平方之和. …………………………………… 17 分