

绝密★启用前

2025 届高三第一学期 12 月质量检测

数 学

全卷满分 150 分,考试时间 120 分钟。

注意事项:

1. 答题前,先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上,并将条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 请按题号顺序在答题卡上各题目的答题区域内作答,写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 选择题用 2B 铅笔在答题卡上把所选答案的标号涂黑;非选择题用黑色签字笔在答题卡上作答;字体工整,笔迹清楚。
4. 考试结束后,请将试卷和答题卡一并上交。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 $z = (1-i)(2-i)i^3$, 则复数 z 在复平面内所对应的点的坐标为
A. (3, 1) B. (-3, -1) C. (3, -1) D. (-3, 1)
2. 已知集合 $A = \{x \mid |x-1| \leq 1\}$, $B = \{x \mid x^2 - 4x + 3 > 0\}$, 则 $A \cap (\complement_{\mathbb{R}} B) =$
A. [1, 2] B. [0, 1] C. [1, 3] D. [0, 3]
3. 曲线 $y = e^x - 2ax$ 在 $x = 0$ 处的切线经过点 (2, -1), 则实数 a 的值为
A. -1 B. 0 C. 1 D. 2
4. 已知圆锥的侧面积是底面积的 3 倍, 体积是 $18\sqrt{2}\pi$, 则圆锥的底面半径为
A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. 3
5. 函数 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}(\sin x + \cos x)} \left(0 \leq x \leq \frac{11\pi}{12}\right)$ 的值域是
A. [-1, 2] B. $\left[\frac{1}{2}, 4\right]$ C. $\left[\frac{1}{4}, 2\right]$ D. $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$
6. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 $\sqrt{5}$, 双曲线 C 的一条渐近线与圆 $M: x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ 交于 A, B 两点, 则 $|AB| =$
A. $\sqrt{11}$ B. $\frac{3\sqrt{11}}{5}$ C. 3 D. $\frac{2\sqrt{55}}{5}$
7. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_3 = 9$, $S_9 = 3$, 则 $S_{16} =$
A. $-\frac{400}{9}$ B. -44 C. $-\frac{134}{3}$ D. $-\frac{136}{3}$

8. 已知函数 $f(x)$ 为偶函数, 当 $x_2 > x_1 \geq 0$ 时, $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$. 若对任意的 $x \in \mathbf{R}$, $f(m(2^x - 2^{-x})) \leq f(4^x + 4^{-x})$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围是

- A. $[-3, 3]$ B. $[-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$
C. $[-1, 1]$ D. $[-4, 4]$

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 经过点 $P(1, 5)$ 且在两坐标轴上的截距的绝对值相等的直线方程可能为

- A. $y = 5x$ B. $y = x + 4$ C. $y = 2x + 3$ D. $y = 6 - x$

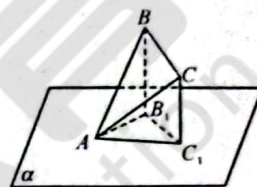
10. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 5$, $BC = \sqrt{10}$, $A \in$ 平面 α , 点 B, C 在平面 α 的同侧, AB, AC 在平面 α 内的射影 AB_1, AC_1 的长分别为 3, 4, 则

A. $BC \parallel$ 平面 α

B. $B_1C_1 = 3$

C. 四棱锥 $A - BCC_1B_1$ 的体积为 $\frac{14\sqrt{5}}{3}$

D. 平面 ABC 与平面 BCC_1B_1 的夹角的正弦值为 $\frac{7}{9}$



11. 在平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , A 为椭圆 C 的右顶点, B 为椭圆 C 的上顶点, P 为椭圆 C 上与椭圆顶点不重合的动点, 直线 PA 与 y 轴交于点 N , 直线 PB 与 x 轴交于点 M , 则

A. 椭圆 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. 当 $PF_1 \perp PF_2$ 时, $|PF_1| \cdot |PF_2| = 3$

C. $|AM| \cdot |BN| = 4$

D. 当点 P 在第三象限时, 若 $MN \parallel AB$, 则 $|OP| = \frac{\sqrt{10}}{2}$

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 已知向量 a, b 的夹角为 $\frac{3\pi}{4}$, $|a| = 2$, $|b| = 3$, 若 a 在 b 方向上的投影向量为 λb , 则 $\lambda =$ _____.

13. 已知 $\tan(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}$, $\tan \alpha = 2$, 则 $\tan 2\alpha \tan 2\beta =$ _____.

14. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$, 若存在实数 $x_1, x_2 (x_2 > x_1 \geq 0)$ 满足 $f(x_1) = f(x_2)$, 则

$\frac{3x_1^2 + 1}{x_2^2}$ 的最大值为 _____.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤。

15. (本小题满分 13 分)

在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，且 $a \sin B + b \sin A = 2\sqrt{3}(c - a \cos B)$ 。

(1) 求 A ；

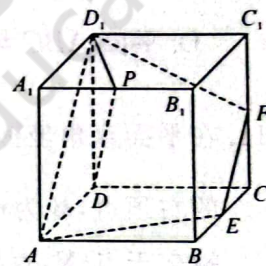
(2) 若 $\sin B = \frac{2}{3} \sin C$ ， $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ，求 a 。

16. (本小题满分 15 分)

如图，在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， E 为 BC 的中点， F 为 CC_1 的中点， P 是 A_1B_1 的中点。

(1) 证明：平面 $DPD_1 \perp$ 平面 $AEFD_1$ ；

(2) 求直线 D_1P 与平面 $AEFD_1$ 所成角的正弦值。



17. (本小题满分 15 分)

在前 n 项和为 S_n 的等比数列 $\{a_n\}$ 中， $a_4 = a_1^2 a_2$ ， $S_2 = 6$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 若 $a_1 > 0$ ，记 $b_n = na_n$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n ；

(3) 若 $a_1 < 0$ ，记 $c_n + c_{n+1} = a_n$ ，且 $c_1 = \frac{1}{2}$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的通项公式。

18. (本小题满分 17 分)

已知函数 $f(x) = (ax+1)\ln x - (a+1)x$, 其中 $a \neq 0$.

(1) 当 $a < 0$ 时, 若函数 $f(x)$ 有两个零点, 求实数 a 的取值范围;

(2) 若 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点, 求实数 a 的取值范围.

19. (本小题满分 17 分)

已知抛物线 $C: y^2 = 2px$ (p 为正整数), M 为直线 $x=t$ ($t < 0$) 上任意一点, 过点 M 作抛物线 C 的两条切线, 切点分别为 A, B , 记点 A, M, B 的纵坐标分别为 y_1, y_0, y_2 (其中 $y_1 < y_2$).

(1) 证明: y_1, y_0, y_2 成等差数列;

(2) 若 $t = -2p$, 记等差数列 y_1, y_0, y_2 的公差为 d .

(i) 用 p 和 y_0 表示 d ;

(ii) 初等数论是研究数的规律, 特别是整数性质的数学分支. 初等数论中有如下定理: 若两个正整数的最大公约数为 1, 且这两个正整数的乘积是某个正整数的平方, 则这两个正整数都为完全平方数. 请用该定理证明下面的问题:

若 y_0 为正奇数, d 为正整数, 且 y_0, d, p 这三个数两两之间的最大公约数都为 1,

证明: d 一定可以表示为某两个正整数的平方之和.