

2025 届高三部分重点中学 12 月联合测评
数学试题参考答案及多维细目表

题号	1	2	3	4	5	6
答案	C	D	B	D	C	A
题号	7	8	9	10	11	
答案	A	B	AD	ABC	BCD	

1. 【答案】C
【解析】 $\because A = \{x \mid \ln(x-1) \leq 0\} = \{x \mid 1 < x \leq 2\}$,
 $B = \{x \mid 0 \leq 2x - 1 \leq 2\} = \left\{x \mid \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}\right\}$,
 $\therefore A \cup B = \left\{x \mid \frac{1}{2} \leq x \leq 2\right\}$.
2. 【答案】D
【解析】由 $z = \frac{4+i}{1-i}$ 可得 $\bar{z} = \frac{(4+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{3+5i}{2}$, $\bar{z} = \frac{3-5i}{2}$, 故对应的点为 $\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$, 位于第四象限.
3. 【答案】B
【解析】 $\because \sum_{i=1}^8 x_i = \frac{9}{8} \times 8 = 9$, $\therefore$ 增加两个样本点后 x 的平均数为 $\frac{9-1+2}{10} = 1$; $\because \hat{y} = 2 \times \frac{9}{8} - \frac{1}{4} = 2$,
 $\therefore \sum_{i=1}^8 y_i = 2 \times 8 = 16$, $\therefore$ 增加两个样本点后 y 的平均数为 $\frac{16+5+9}{10} = 3$, $\therefore 3 = 3 \times 1 + \hat{b}$, 解得 $\hat{b} = 0$,
 $\therefore$ 新的经验回归方程为 $\hat{y} = 3x$, 则当 $x = 4$ 时, $\hat{y} = 12$, $\therefore$ 样本点 $(4, 10)$ 的残差为 $10 - 12 = -2$.
4. 【答案】D
【解析】 $\because 2 \cdot {}_{2023}^{2025} C_{2025} = (2 \cdot {}_{2024}^{2025} C_{2025} - 1) \cdot {}_{2025}^{2025} C_{2025} = {}_{2025}^{2025} C_{2025} - {}_{2025}^{2025} C_{2025} = 0$,
 $\therefore b = 2 \cdot {}_{2024}^{2025} C_{2025} - {}_{2025}^{2025} C_{2025} = 0$.
5. 【答案】C
【解析】 $\because \cos \theta = 1$, 则 $a \cdot b = |a| \cdot |b|$, $\therefore a, b$ 同向, 但当 $|a| - |b| < 0$ 时显然不满足 $|a - b| = |a| - |b|$, 因此充分性不成立. $\because |a - b| = |a| - |b|$, $\therefore (|a - b|)^2 = (|a| - |b|)^2$, 即 $|a|^2 + |b|^2 - 2a \cdot b = |a|^2 + |b|^2 - 2|a| \cdot |b|$, 即 $a \cdot b = |a| \cdot |b|$, 从而 a, b 同向, $\cos \theta = 1$, 由此可

- 知必要性成立.
6. 【答案】A
【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q, q \neq 0$, 依题意, $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = 14, a_2 = \frac{1}{4}$, 即 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2 q} = \frac{q}{a_2} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} \cdot \frac{1}{q} = 14, \therefore 2q + 2 + \frac{2}{q} = 7, 2q^2 - 5q + 2 = 0$, 解得 $q = 2$ 或 $q = \frac{1}{2}$, $\therefore a_1 = \frac{1}{8}, a_2 = \frac{1}{4}, a_3 = \frac{1}{2}$ 或 $a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{4}, a_3 = \frac{1}{8}, \therefore S_3 = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{7}{8}$.
7. 【答案】A
【解析】由题知 $F(1, 0)$, 直线 l 的斜率不为 0, 设直线 l 的方程为 $x = my + 1, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,
-
- 联立 $\begin{cases} x = my + 1, \\ y^2 = 4x, \end{cases}$ 整理得 $y^2 - 4my - 4 = 0$, 则 $y_1 + y_2 = 4m, y_1 y_2 = -4$.
 $\therefore x_1 + x_2 = m(y_1 + y_2) + 2 = 4m^2 + 2$.
 $\because \vec{OP} = \vec{OA} + \vec{OB}$, $\therefore$ 四边形 $OAPB$ 为平行四边形.
 $\because$ 点 P 的横坐标为 3, $\therefore 3 = x_1 + x_2 = 4m^2 + 2$, 解得 $m^2 = \frac{1}{4}$.
 $\therefore |AB| = \sqrt{1+m^2} \cdot \sqrt{(y_1+y_2)^2 - 4y_1 y_2} = \sqrt{1+m^2} \cdot \sqrt{16m^2 - 4 \times (-4)} = 5$.
点 O 到直线 AB 的距离为 $\frac{1}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\therefore$ 平
- 数学试题 参考答案 第 1 页 共 7 页

行四边形 $OAPB$ 的面积为 $5 \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$.

8. 【答案】B

【解析】如图，取 AB 中点 M ，连接 PM, CM .

由题可知 $AB \perp PM, AB \perp CM$.

$\because PM \cap CM = M, PM \subset \text{平面 } PMC, CM \subset \text{平面 } PMC, \therefore AB \perp \text{平面 } PMC$.

作 $PH \perp MC$ ，垂足为 H . $\because PH \subset \text{平面 } PMC, \therefore AB \perp PH$.

又 $CM \cap AB = M, CM \subset \text{平面 } ABC, AB \subset \text{平面 } ABC, \therefore PH \perp \text{平面 } ABC$.

过点 H 作 $HN \perp BC$ ，垂足为 N ，连接 PN ，易知 $BC \perp PN$.

设小球半径为 r ， $\therefore \frac{PH}{2r} = \frac{PB}{FB} = \frac{3}{2}, \therefore PH = 3r$.

根据题意， $V_{\text{三棱锥 } P-ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot PH =$

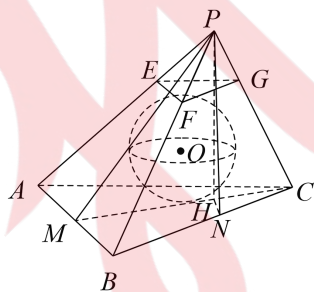
$\frac{1}{3} (S_{\triangle PAB} + S_{\triangle PAC} + S_{\triangle PBC} + S_{\triangle ABC}) \cdot r$,

$\because S_{\triangle PAB} = S_{\triangle ABC} = 2, S_{\triangle PAC} = S_{\triangle PBC}, \therefore 6 = 4 + 2S_{\triangle PAC}, \therefore S_{\triangle PAC} = S_{\triangle PBC} = 1$.

由 $\frac{1}{2} BC \cdot PN = 1$ ，得 $PN = 1, \therefore \sin \angle PBC =$

$\frac{PN}{PB} = \frac{1}{2}, \therefore \cos \angle PBN = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore PC = \sqrt{PB^2 + CB^2 - 2PB \cdot CB \cos \angle PBC} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$.



9. 【答案】AD

【解析】对于选项 A，当 $x > 0$ 时， $\frac{2x}{x^2+1} = \frac{2}{x+\frac{1}{x}}$.

$\because x + \frac{1}{x} \geq 2$ ，当且仅当 $x = 1$ 时，取等号， $\therefore$

$\frac{2x}{x^2+1} = \frac{2}{x+\frac{1}{x}} \leq 1$ ，故正确.

对于选项 B， $\because x > y > 0$ 且 $z > 0$ ，由糖水原理可知 $\frac{y+z}{x+z} > \frac{y}{x}$ ，故错误；

对于选项 C，当 $x < 0 < y$ 时，结论不成立，故错误；

对于选项 D， $\left(x + \frac{1}{y}\right) - \left(y + \frac{1}{x}\right) = \frac{xy+1}{y} - \frac{xy+1}{x} = (xy+1)\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) > 0$ ，即 $x + \frac{1}{y} > y + \frac{1}{x}$ ，故正确.

10. 【答案】ABC

【解析】由图可知 $A = 2, \begin{cases} 0 + \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{6}, \\ \frac{5\omega\pi}{12} + \varphi = 2k\pi + \pi, \end{cases}$

$k \in \mathbb{Z}$ ，解得 $\omega = 2, \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$,

$\therefore f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$.

对于选项 A，当 $x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right]$ 时， $2x + \frac{\pi}{6} \in$

$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ， $\therefore f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递增，故正确；

对于选项 B， $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2\sin\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = 2\sin \frac{3\pi}{2} = -2$ 为其最小值， $\therefore x = \frac{2\pi}{3}$ 为 $f(x)$ 图象的一条对称轴，故正确；

对于选项 C， $f\left(\frac{11\pi}{12}\right) = 2\sin\left(\frac{11\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = 2\sin 2\pi = 0$ ， $\therefore$ 点 $\left(\frac{11\pi}{12}, 0\right)$ 为 $f(x)$ 图象的一个对称中心，故正确；

对于选项 D，当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 时， $2x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$ ，当 $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$ 即 $x = 0$ 时， $f(x)_{\min} = 1$ ，当 $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ 即 $x = \frac{\pi}{6}$ 时， $f(x)_{\max} = 2$ ，即 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 上的值域为 $[1, 2]$ ，故错误.

11. 【答案】BCD

【解析】对于选项 A，沿 $C_1 \rightarrow B_1 \rightarrow A_1 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow C_1$ 等路线即可，故错误；

对于选项 B，若存在重复路线，两次移动回到点 C_1 可以第一次移动到达点 A_1, B_1, C ，第三次移动再从这些移动方式中选，共有 9 种走法，另外可以先移动两次再原路返回，第一次移动可能到达点 A_1, B_1, C ，每个点在第二次移动时都有两种移动方式，故有 6 种方式；

若不存在重复路线，经过点 C 由四条棱组成的闭合回路只有 $C_1 A_1 A C C_1$ 和 $C_1 B_1 B C C_1$ 两种，每条路都有两种经过方式，共有 4 种方式， $\therefore$ 概率为 $\left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot 19 = \frac{19}{81}$ ，故正确；

对于选项 C，列举法： $C_1 \rightarrow A_1 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow B_1 \rightarrow C_1, C_1 \rightarrow A_1 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow C_1, C_1 \rightarrow A_1 \rightarrow B_1 \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow C_1, C_1 \rightarrow B_1 \rightarrow A_1 \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow C_1, C_1 \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow B_1 \rightarrow C_1$ ，故共有 5 条不同笔记，故正确；

对于选项 D，先考虑重复路线：

前两条路线重复，第一次移动到达点 A_1, B_1, C 共 3 条路径；后两条路径重复（即第一次移动到点 A_1 ）同理有 3 条路径，其中 $C_1 \rightarrow A_1 \rightarrow C_1 \rightarrow A_1$ 重复，故共只有 5 条路径；

再考虑不重复路径：只有 $C_1 \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow A_1$ ，1 条路径， $\therefore$ 三次移动后到达点 A 有 6 条路径。记事件 A_1 ：从点 C_1 出发，三次移动后到达点 A_1 ；事件 C ：从点 C_1 出发，三次移动时经过点 C ，故

$$P(A_1) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot 6, P(A_1 C) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot 2,$$

故 $P(C|A_1) = \frac{P(A_1 C)}{P(A_1)} = \frac{1}{3}$ ，故正确。（也可以直接列举路径来判断）

12. 【答案】8

【解析】根据点 F 到其中一条渐近线的距离为 2，可得 $b=2$ ，且满足 $\alpha + \beta = \pi$ 。又 $\alpha = \frac{1}{5}\beta$ ， $\therefore \beta =$

$\frac{\pi}{6}$ ， $\therefore \frac{b}{a} = \tan \beta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，故 $a = 2\sqrt{3}$ ， $\therefore c = 4$ ， $\therefore$ 焦距为 $2c = 8$ 。

13. 【答案】45

【解析】由正态分布的性质得质量指标在区间

$(96, 100)$ 的概率为 $1 - 2 \times 0.05 = 0.9$ ，

即 1 件产品的质量指标位于区间 $(96, 100)$ 的概率为 0.9， $\therefore Y \sim B(500, 0.9)$ ，故 $D(Y) = 500 \times 0.9 \times 0.1 = 45$ 。

14. 【答案】 $[e^{-e}, 1)$

【解析】 $f(x) = a^{x-1} - \log_a(x-1) = \frac{a^x}{a} -$

$$\frac{\ln(x-1)}{\ln a} = \frac{1}{a \ln a} [a^x \ln a - a \ln(x-1)],$$

记 $h(x) = a^x \ln a - a \ln(x-1)$ ， $f(x)$ 在定义域上单调，可得 $h(x)$ 必为单调函数。

若 $h(x)$ 单调递增，则 $h'(x) = a^x (\ln a)^2 -$

$$\frac{a}{x-1} \geq 0 \text{ 恒成立，即 } (x-1)a^{x-1} \geq \frac{1}{(\ln a)^2},$$

$\therefore ta^t \geq \frac{1}{(\ln a)^2}$ 。又函数 $G(t) = ta^t$ 在 $t \rightarrow 0$ 时值趋近于 0，不满足。

若 $h(x)$ 单调递减，则 $h'(x) = a^x (\ln a)^2 - \frac{a}{x-1} \leq 0$ 恒成立，即 $(x-1)a^{x-1} \leq \frac{1}{(\ln a)^2}$ ，即

$$ta^t \leq \frac{1}{(\ln a)^2},$$

$$\therefore (ta^t)_{\max} \leq \frac{1}{(\ln a)^2}, \text{ 设 } G(t) = ta^t, G'(t) = (1$$

$$+ t \ln a) a^t = 0, \text{ 则 } t = -\frac{1}{\ln a},$$

当 $a > 1$ 时， $t < 0$ 不成立；

当 $0 < a < 1$ 时， $t = -\frac{1}{\ln a} > 0$ ， $\therefore G(t)$ 在区间

$\left(0, -\frac{1}{\ln a}\right)$ 上单调递增，在区间

$\left(-\frac{1}{\ln a}, +\infty\right)$ 上单调递减，

$$\therefore -\frac{1}{\ln a} \cdot a^{-\frac{1}{\ln a}} \leq \frac{1}{(\ln a)^2}, \text{ 即 } a^{-\frac{1}{\ln a}} \leq -\frac{1}{\ln a},$$

$$\therefore \left(-\frac{1}{\ln a}\right) \ln a \leq \ln \left(-\frac{1}{\ln a}\right), \text{ 即 } -1 \leq$$

$$\ln \left(-\frac{1}{\ln a}\right), \text{ 解得 } e^{-e} \leq a < 1.$$

$$15. \text{ 解：(1) 由二倍角公式得 } \frac{\left(\sin \frac{A}{2} + \cos \frac{A}{2}\right)^2}{\cos^2 \frac{A}{2} - \sin^2 \frac{A}{2}} =$$

$\frac{\left(\sin \frac{B}{2}+\cos \frac{B}{2}\right)^2}{\cos ^2 \frac{B}{2}-\sin ^2 \frac{B}{2}}, \cdots \cdots 2$ 分

$\therefore \frac{\sin \frac{A}{2}+\cos \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}-\sin \frac{A}{2}}=\frac{\sin \frac{B}{2}+\cos \frac{B}{2}}{\cos \frac{B}{2}-\sin \frac{B}{2}},$

整理得 $\sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}-\cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}=0,$

即 $\sin \left(\frac{A}{2}-\frac{B}{2}\right)=0, \cdots \cdots 5$ 分

$\because A, B \in(0, \pi), \therefore \frac{A}{2}-\frac{B}{2}=0$, 即 $A=B$, 即 $\triangle ABC$ 为等腰三角形. $\cdots \cdots 6$ 分
(其他方法酌情给分)

(2) 由(1)及题设, 有 $AC=BC=2CD$,

$\therefore \cos \angle CAD=\frac{AC^2+AD^2-CD^2}{2AC \cdot AD}$

$$=\frac{AC^2+AD^2-\frac{AC^2}{4}}{2AC \cdot AD}$$
$$=\frac{\frac{3AC^2}{4}+AD^2}{2AC \cdot AD}$$
$$=\frac{3AC}{8AD}+\frac{AD}{2AC}$$
$$\geqslant 2 \sqrt{\frac{3AC}{8AD} \cdot \frac{AD}{2AC}}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}, \cdots \cdots 10$$
 分

$\therefore \angle CAD \leqslant \frac{\pi}{6}$, 当且仅当 $\frac{AD}{AC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时, 等号成立.

即 $\angle CAD$ 的最大值为 $\frac{\pi}{6}$, 此时由 $\frac{AD}{AC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 可得 $\triangle ACD$ 为直角三角形, $\angle ACD=\frac{\pi}{3} . \cdots 12$ 分

又由(1)可得 $\triangle ABC$ 为正三角形, $\therefore \triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2=\sqrt{3} . \cdots \cdots 13$ 分

16. 解: (1) 在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 和 $\text{Rt} \triangle ABD$ 中,

$\tan \angle BAC=\frac{BC}{AB}=\frac{1}{2}, \tan \angle ABD=\frac{AD}{AB}=2,$

$\therefore \angle BAC$ 与 $\angle ABD$ 互余, 即 $AC \perp BD . \cdots \cdots$

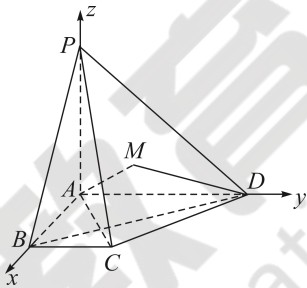
$\cdots \cdots 4$ 分

又 $PA \perp$ 平面 $ABCD, BD \subset$ 平面 $ABCD$, $\therefore PA \perp BD$.

又 $AC, PA \subset$ 平面 $PAC, AC \cap PA=A$, $\therefore BD \perp$ 平面 PAC .

又 $BD \subset$ 平面 $PBD, \therefore$ 平面 $PAC \perp$ 平面 PBD . $\cdots \cdots 7$ 分

(2) $\because AB, AD, AP$ 两两互相垂直, $\therefore$ 分别以 AB, AD, AP 为 x 轴, y 轴, z 轴建立空间直角坐标系.



不妨设 $BC=1$, 则 $A(0,0,0), C(2,1,0), D(0,4,0), P(0,0,4),$

$\therefore \overrightarrow{PC}=(2,1,-4), \overrightarrow{PD}=(0,4,-4).$

$\because$ 点 M 在平面 PCD 内,

$\therefore$ 设 $\overrightarrow{PM}=x \overrightarrow{PC}+y \overrightarrow{PD},$

则 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AP}+x \overrightarrow{PC}+y \overrightarrow{PD}=(0,0,4)+x(2,1,-4)+y(0,4,-4)=(2x, x+4y, 4-4x-4y), \cdots \cdots 9$ 分

$\because AM \perp$ 平面 $PCD, \therefore AM \perp PC, AM \perp PD,$

$$\therefore \begin{cases} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{PC}=4x+x+4y-16+16x+16y \\ \quad \quad \quad =21x+20y-16=0, \\ \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{PD}=4x+16y-16+16x+16y \\ \quad \quad \quad =20x+32y-16=0, \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x=\frac{12}{17}, \\ y=\frac{1}{17}, \end{cases}$

$\therefore \overrightarrow{AM}=\left(\frac{24}{17}, \frac{16}{17}, \frac{16}{17}\right)$, 即 $M\left(\frac{24}{17}, \frac{16}{17}, \frac{16}{17}\right), \cdots$

$\cdots \cdots 12$ 分

$\therefore$ 点 M 到平面 PAD 的距离 $d_1=\frac{24}{17},$

点 M 到棱 AD 的距离 $d_2=\sqrt{\left(\frac{24}{17}\right)^2+\left(\frac{16}{17}\right)^2}$

$$=\frac{8 \sqrt{13}}{17},$$

设二面角 $M-AD-P$ 大小为 θ , 则 $\sin \theta = \frac{d_1}{d_2} =$

$$\frac{24}{8\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13},$$

$$\therefore \cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \frac{2\sqrt{13}}{13},$$

即二面角 $M-AD-P$ 的余弦值为 $\frac{2\sqrt{13}}{13}$. ……

…………… 15 分

17. 解: (1) $f'(x) = \cos x - \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \sin x$, 且

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\cos x > 0$, $\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \sin x < 0$, 从

$$\text{而 } f'(x) = \cos x - \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \sin x > 0,$$

即此时函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增;

…………… 4 分

当 $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$ 时, $\cos x < 0$, $\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \sin x \geq 0$,

$$\text{从而 } f'(x) = \cos x - \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \sin x < 0,$$

即此时函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 上单调递减.

$\therefore$ 综上所述, 函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单

调递增, 在区间 $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 上单调递减. …… 7 分

$$(2) f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 > 0, \text{ 又 } f(\pi) = -\frac{\pi}{2} + 1 < 0, \text{ 且函}$$

数 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 上单调递减,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 上存在唯一的零点.

…………… 9 分

当 $x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ 时, 记 $g(x) = f'(x) = \cos x -$

$$\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \sin x,$$

$$\text{从而 } g'(x) = -2\sin x - \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cos x,$$

且此时 $\sin x < 0$, $\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cos x < 0$,

$\therefore g'(x) > 0$, $g(x) = f'(x)$ 在区间 $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ 上单

调递增.

$$g(\pi) = -1 < 0, g\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \pi > 0, \therefore \text{存在 } x_0 \in$$

$$\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right), \text{ 使得 } g(x_0) = 0, \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

且 $x \in (\pi, x_0)$ 时, $g(x) = f'(x) < 0$, 即此时 $f(x)$ 在区间 (π, x_0) 上单调递减;

$x \in \left(x_0, \frac{3\pi}{2}\right)$ 时, $g(x) = f'(x) > 0$, 即此时

$f(x)$ 在区间 $\left(x_0, \frac{3\pi}{2}\right)$ 上单调递增. …… 13 分

$$\therefore \text{由 } f(\pi) = -\frac{\pi}{2} + 1 < 0, \text{ 得 } f(x_0) < 0,$$

即函数 $f(x)$ 在区间 (π, x_0) 上无零点;

$$\text{而由 } f(x_0) < 0, f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1 > 0,$$

即函数 $f(x)$ 在区间 $\left(x_0, \frac{3\pi}{2}\right)$ 上有唯一的零点.

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ 上有 2 个零点.

…………… 15 分

18. 解: (1) 由题意知抛物线的焦点 P 到两定点 A ,

B 的距离之和等于点 A, B 到抛物线的准线的距离之和, 等于 AB 的中点 O 到准线的距离的 2 倍, 即等于圆 $x^2 + y^2 = 9$ 的半径的 2 倍,

$\therefore |PA| + |PB| = 6 > |AB| = 2$, $\therefore$ 点 P 在以 A, B 为焦点的椭圆 E 上, …… 3 分

设椭圆 E 的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$,

$$\text{则 } 2a = 6, 2c = 2, \therefore a = 3, c = 1, \therefore b^2 = a^2 - c^2 = 8,$$

$\therefore$ 曲线 E 的标准方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$. …… 8 分

(2) 设直线 $MN: x = my + 2 (m \neq 0)$,

$$\text{由 } \begin{cases} x = my + 2, \\ 8x^2 + 9y^2 = 72, \end{cases}$$

$$\therefore (8m^2 + 9)y^2 + 32my - 40 = 0.$$

设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 则 $y_1 + y_2 =$

$$-\frac{32m}{8m^2 + 9}, y_1 y_2 = \frac{-40}{8m^2 + 9},$$

CM 的中点坐标为 $\left(\frac{x_1-3}{2}, \frac{y_1}{2}\right), k_{CM} = \frac{y_1}{x_1+3},$
..... 9 分
CM 的垂直平分线的斜率为 $-\frac{x_1+3}{y_1}.$... 10 分
 $\therefore$ CM 的垂直平分线方程为 $y = -\frac{x_1+3}{y_1} \cdot$
 $\left(x - \frac{x_1-3}{2}\right) + \frac{y_1}{2},$ 即 $y = -\frac{my_1+5}{y_1}x + \frac{x_1^2-9}{2y_1}$
 $+\frac{y_1}{2},$
由 $\frac{x_1^2}{9} + \frac{y_1^2}{8} = 1$ 得 $\frac{x_1^2-9}{2y_1} = -\frac{9}{16}y_1,$
 $\therefore$ CM 的垂直平分线方程为 $y = -\frac{my_1+5}{y_1}x -$
 $\frac{1}{16}y_1.$ 11 分
同理 CN 的垂直平分线方程为 $y = -\frac{my_2+5}{y_2}x$
 $-\frac{1}{16}y_2.$ 13 分
设点 $Q(x_0, y_0),$
则 y_1, y_2 是方程 $y_0 = -\frac{my+5}{y}x_0 - \frac{1}{16}y,$
即 $y^2 + (16mx_0 + 16y_0)y + 80x_0 = 0$ 的两根,
 $\therefore \begin{cases} y_1 + y_2 = -16mx_0 - 16y_0 = \frac{-32m}{8m^2+9}, \\ y_1 y_2 = 80x_0 = \frac{-40}{8m^2+9}, \end{cases}$ 两式
相除得 $\frac{-mx_0 - y_0}{5x_0} = \frac{4m}{5}, \therefore \frac{y_0}{x_0} = -5m.$
..... 16 分
 $\therefore k_{OQ} \cdot k_{MN} = -5m \cdot \frac{1}{m} = -5,$
即直线 OQ 与 MN 的斜率之积为定值 -5. ...
..... 17 分
(其他方法酌情给分)

19. 解: (1) 对数列 S_0 依次做 A_3, A_4, A_5 变换即可.
..... 4 分

(2) 首先, 若对数列 $S_0: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ 依次做
 $A_{i+1}, A_{i+2}, \dots, A_5 (i \in \{1, 2, 3, 4\})$ 变换, 得到的
数列 a_i 加 1, a_{i+1} 减 1, 其余项不变;
若对数列中 $S_0: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ 依次做 $A_i,$
 $A_{i-1}, \dots, A_1 (i \in \{1, 2, 3, 4\})$ 变换, 得到的数列
中 a_i 减 1, a_{i+1} 加 1, 其余项不变. 7 分
 $\therefore$ 可以通过若干次变换使得相邻两数一个加
1, 另一个减 1,
 $\therefore$ 可以通过若干次变换使得第一项变为 0, 第
二项变为 $a_1 + a_2.$
同样的可以通过若干次变换分别使得 $a_2, a_3,$
 a_4 均变为 0, 此时即为 0, 0, 0, 0, 0. 10 分
(3) 记此时的变换①为 $B_1,$ 变换③为 $B_{10}.$
首先, 记 $T_1 = a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9, T_2 = a_2 +$
 $a_4 + a_6 + a_8 + a_{10},$
每次变换使得 T_1 的值加 2 或减 2 或不变, 故可
以经过若干次变换使得 $T_1 = 0,$ 此时 $T_2 = 0;$
其次, 对任意数列 $S_0: a_1, a_2, \dots, a_{10}$ 依次做
 $A_{j-1}, A_j, A_j, A_{j+1}$ 变换, 其中 $j \in \{3, 4, \dots, 8\},$
得到的数列中 a_j 减 2, a_{j-2}, a_{j+2} 均加 1, 其余项
不变, 记此变换为 $B_j,$
依次做 A_8, A_9, A_{10} 变换, 得到的数列中 a_9 减
1, a_7 加 1, 其余项不变, 记此变换为 $B_9,$
此时 B_1, B_3, B_5, B_7, B_9 只变换 $a_1, a_3, a_5, a_7,$
 $a_9,$ 且对 a_1, a_3, a_5, a_7, a_9 规则同第 (2) 问, 且
 $T_1 = 0,$ 15 分
 $\therefore$ 由 (2) 知可以对 S_0 做若干次变换, 得到的数
列中 $a_1 = a_3 = a_5 = a_7 = a_9 = 0.$
同理可以再对 S_0 做若干次变换, 得到的数列中
 $a_2 = a_4 = a_6 = a_8 = a_{10} = 0,$ 则此时得到数列
 $\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{10 \text{ 个}},$ 17 分
(其他方法酌情给分)

多维细目表

题型	题号	分值	必备知识	学科素养						预估难度		
				数学 抽象	逻辑 推理	数学 建模	直观 想象	数学 运算	数据 分析	易	中	难
选择题	1	5	集合与简易逻辑						√	√		
选择题	2	5	复数					√		√		
选择题	3	5	统计与概率		√					√		
选择题	4	5	二项式定理		√			√		√		
选择题	5	5	平面向量		√		√			√		
选择题	6	5	等比数列		√			√		√		
选择题	7	5	抛物线方程及其性质			√					√	
选择题	8	5	立体几何		√		√					√
选择题	9	6	不等式的性质		√				√	√		
选择题	10	6	三角函数的图象及其性质			√					√	
选择题	11	6	排列组合与概率	√		√						√
填空题	12	5	双曲线方程及其性质				√	√		√		
填空题	13	5	概率分布	√		√					√	
填空题	14	5	导数及其应用		√				√			√
解答题	15	13	解三角形		√		√			√		
解答题	16	15	立体几何				√	√		√		
解答题	17	15	导数及其应用		√			√	√		√	
解答题	18	17	椭圆方程及其性质				√	√			√	
解答题	19	17	数列与新定义综合	√	√	√						√