

2025 届高三部分重点中学 12 月联合测评

数学试题

命题学校：武汉外国语学校

命、审题人：邓海波 肖计雄 夏贤聪

考试时间：2024 年 12 月 12 日 15:00—17:00

试卷满分：150 分

考试用时：120 分钟

注意事项：

- 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
- 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
- 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A = \{x | \ln(x-1) \leq 0\}$, $B = \{x | 0 \leq 2x-1 \leq 2\}$, 则 $A \cup B =$

A. $\left\{x \mid 1 < x \leq \frac{3}{2}\right\}$

B. $\{x | x \leq 2\}$

C. $\left\{x \mid \frac{1}{2} \leq x \leq 2\right\}$

D. $\left\{x \mid \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}\right\}$

2. 已知复数 z 满足 $(1-i)z = 4+i$, 则 z 的共轭复数在复平面内对应的点位于

A. 第一象限

B. 第二象限

C. 第三象限

D. 第四象限

3. 已知变量 x 和变量 y 的一组成对样本数据为 $(x_i, y_i) (i=1, 2, 3, \dots, 8)$, 其中 $\bar{x} = \frac{9}{8}$, 其回归直线方程为 $\hat{y} = 2x - \frac{1}{4}$, 当增加两个样本数据 $(-1, 5)$ 和 $(2, 9)$ 后, 重新得到的回归直线方程斜率为 3, 则在新的回归直线方程的估计下, 样本数据 $(4, 10)$ 所对应的残差为

A. -3

B. -2

C. -1

D. 1

4. 若正整数 a, b 满足等式 $2\,023^{2\,025} = 2\,024a + b$, 且 $b < 2\,024$, 则 $b =$

A. 1

B. 2

C. 2 022

D. 2 023

5. 已知 a, b 均为非零向量, 其夹角为 θ , 则“ $\cos \theta = 1$ ”是“ $|a-b| = |a| - |b|$ ”的

A. 充要条件

B. 充分不必要条件

C. 必要不充分条件

D. 既不充分也不必要条件

6. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = 14$, $a_2 = \frac{1}{4}$, 记 S_n 为其前 n 项和, 则 $S_3 =$

A. $\frac{7}{8}$

B. $\frac{7}{4}$

C. $\frac{7}{2}$

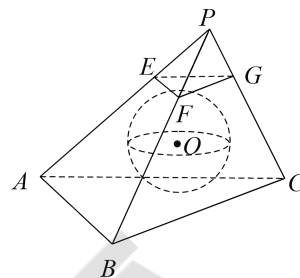
D. 7

7. 已知直线 l 经过抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点, 且与抛物线交于 A, B 两点, 若使得 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ 成立的点 P 的横坐标为 3, 则四边形 $OAPB$ 的面积为

- A. $2\sqrt{5}$ B. $3\sqrt{5}$ C. $4\sqrt{5}$ D. $5\sqrt{5}$

8. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA = PB = CA = CB = 2$, $\angle APB = \angle ACB = \frac{\pi}{2}$, E, F, G 分别为 PA, PB, PC 上靠近点 P 的三等分点, 若此时恰好存在一个小球与三棱锥 $P-ABC$ 的四个面均相切, 且小球同时还与平面 EFG 相切, 则 $PC =$

- A. $\sqrt{6} + \sqrt{2}$ B. $\sqrt{6} - \sqrt{2}$
C. $\sqrt{13} + 1$ D. $\sqrt{13} - 1$



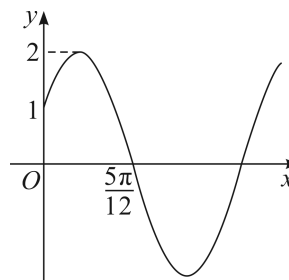
二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 下列结论正确的是

- A. 若 $x > 0$, 则 $\frac{2x}{x^2 + 1} \leq 1$ B. 若 $x > y > 0, z > 0$, 则 $\frac{y}{x} > \frac{y+z}{x+z}$
C. 若 $xy \neq 0$ 且 $x < y$, 则 $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$ D. 若 $x > y > 0$, 则 $x + \frac{1}{y} > y + \frac{1}{x}$

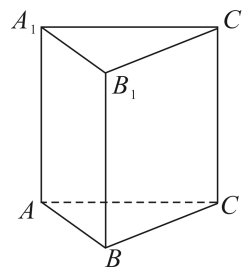
10. 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, 0 < \varphi < 2\pi$) 的部分图象如图所示, 则

- A. $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递增
B. $f(x)$ 图象的一条对称轴方程为 $x = \frac{2\pi}{3}$
C. $f(x)$ 图象的一个对称中心为点 $\left(\frac{11\pi}{12}, 0\right)$
D. $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 上的值域为 $[1, \sqrt{3}]$



11. 甲同学想用一支铅笔从如下的直三棱柱的顶点 C_1 出发沿三棱柱的棱逐步完成“一笔画”, 即每一步均沿着某一条棱从一个端点到达另一个端点, 紧接着从上一步的终点出发随机选择下一条棱再次画出, 进而达到该棱的另一端点, 按此规律一直进行, 其中每经过一条棱称为一次移动, 并随机选择某个顶点处停止得到一条“一笔画”路径, 比如“一笔画”路径 $C_1 \rightarrow B_1 \rightarrow A_1 \rightarrow A \rightarrow C$. 若某“一笔画”路径中没有重复经过任何一条棱, 则称该路径为完美路径, 否则为不完美路径. 下列说法正确的有

- A. 若“一笔画”路径为完美路径, 则甲不可能 6 次移动后回到点 C_1
B. 经过 4 次移动后仍在点 C_1 的概率为 $\frac{19}{81}$
C. 若“一笔画”路径为完美路径, 则 5 次移动后回到点 C_1 有 5 条不同笔迹
D. 经过 3 次移动后, 到达点 A_1 的条件下经过点 C 的概率为 $\frac{1}{3}$



三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 设 F 为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左焦点, α, β 分别为双曲线 C 的两条渐近

线的倾斜角, 已知点 F 到其中一条渐近线的距离为 2, 且满足 $\alpha = \frac{1}{5}\beta$, 则双曲线 C 的焦距为_____.

13. 某流水线上生产的一批零件, 其规格指标 X 可以看作一个随机变量, 且 $X \sim N(98, \sigma^2)$, 对于 $X \geq 100$ 的零件即为不合格, 不合格零件出现的概率为 0.05, 现从这批零件中随机抽取 500 个, 用 Y 表示这 500 个零件的规格指标 X 位于区间 $(96, 100)$ 的个数, 则随机变量 Y 的方差是_____.

14. 已知函数 $f(x) = a^{x-1} - \log_a(x-1)$ (其中 $a > 0$, 且 $a \neq 1$) 为其定义域上的单调函数, 则实数 a 的取值范围为_____.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分 13 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $\frac{1+\sin A}{\cos A} = \frac{1+\sin B}{\cos B}$.

(1) 判断 $\triangle ABC$ 的形状;

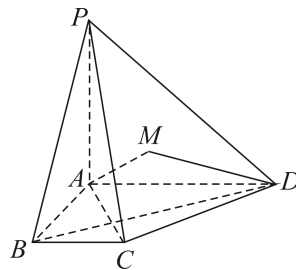
(2) 设 $AB=2$, 且 D 是边 BC 的中点, 求当 $\angle CAD$ 最大时 $\triangle ABC$ 的面积.

16. (本小题满分 15 分)

在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为直角梯形, $AD \parallel BC$, $AB \perp AD$, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AP = AD = 2AB = 4BC$.

(1) 求证: 平面 $PAC \perp$ 平面 PBD ;

(2) $AM \perp$ 平面 PCD 于点 M , 求二面角 $M-AD-P$ 的余弦值.



17. (本小题满分 15 分)

设函数 $f(x) = \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cos x + 1$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 在区间 $[0, \pi]$ 上的单调性;

(2) 判断并证明函数 $y = f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ 上零点的个数.

18. (本小题满分 17 分)

已知过 $A(-1,0), B(1,0)$ 两点的动抛物线的准线始终与圆 $x^2 + y^2 = 9$ 相切, 该抛物线焦点 P 的轨迹是某圆锥曲线 E 的一部分.

(1) 求曲线 E 的标准方程;

(2) 已知点 $C(-3,0), D(2,0)$, 过点 D 的动直线与曲线 E 交于 M, N 两点, 设 $\triangle CMN$ 的外心为 Q , O 为坐标原点, 问: 直线 OQ 与直线 MN 的斜率之积是否为定值, 如果是定值, 求出该定值; 如果不是定值, 说明理由.

19. (本小题满分 17 分)

n 为不小于 3 的正整数, 对整数数列 $S_0: a_1, a_2, \dots, a_n$, 可以做以下三种变换:

① 将 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 中的 a_1 减 1, a_2 加 1, 其余项不变, 称此变换为对 S_0 做 A_1 变换;

② 取 $i \in \{2, \dots, n-1\}$, 将 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 中的 a_i 减 2, a_{i-1}, a_{i+1} 均加 1, 其余项不变, 称此变换为对 S_0 做 A_i 变换;

③ 将 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 中的 a_n 减 1, a_{n-1} 加 1, 其余项不变, 称此变换为对 S_0 做 A_n 变换.

将数列 S_0 做一次变换得到 S_1 , 将数列 S_1 做一次变换得到 $S_2 \dots$

例如: $n=4$ 时, 对数列 $S_0: 0, -1, 1, 0$ 依次做 A_3, A_4 变换, 意义如下:

先对 S_0 做 A_3 变换得到数列 $S_1: 0, 0, -1, 1$, 再对 S_1 做 A_4 变换得到数列 $S_2: 0, 0, 0, 0$.

(1) $n=5$ 时, 给定数列 $S_0: 0, -1, 1, 0, 0$, 求证: 可以对 S_0 做若干次变换得到数列 $0, 0, 0, 0, 0$;

(2) $n=5$ 时, 求证: 对任意整数数列 $S_0: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$, 若 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 0$, 则可以对 S_0 做若干次变换得到数列 $0, 0, 0, 0, 0$;

(3) 若将变换①中的 a_2 改为 a_3 , 将变换③中的 a_{n-1} 改为 a_{n-2} , 在 $n=10$ 时, 求证: 对任意整数数列 $S_0: a_1, a_2, \dots, a_{10}$, 若 $a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = 0$, 且 $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9$ 和 $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10}$ 均为偶数, 则可以对整数数列 S_0 做若干次变换得到数列 $\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{10 \text{ 个}}$.