绝密★启用前

数学参考答案

1.【答案】B

【解析】$z=\dfrac{2}{1-\mathrm{i}}=1+\mathrm{i}$，$\bar{z}=1-\mathrm{i}$，故$|z-\bar{z}|=|2\mathrm{i}|=2$.

2.【答案】C

【解析】因为$A=\{-2,-1,0,1\}$，且$B=\{x|x=2k,k\in\mathbf{Z}\}$，故$A\cap B=\{-2,0\}$.

3.【答案】D

【解析】根据题意有$F(1,0)$，且C的准线方程为$x=-1$，故F到准线的距离$d=2$. 因为准线被圆截得的弦长$l=2$，设圆的半径为R，则由几何关系可知$R^2=d^2+(\dfrac{l}{2})^2=5$，故圆的方程为$(x-1)^2+y^2=5$.

4.【答案】A

【解析】角α的终边在射线$y=-2x(x\leqslant 0)$上，所以角α为第二象限角，且$\tan\alpha=-2$，故$\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. 又因为$\sin(2\alpha-\dfrac{\pi}{4})=\sin 2\alpha\times\cos\dfrac{\pi}{4}-\cos 2\alpha\times\sin\dfrac{\pi}{4}$，且$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$，$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=-\dfrac{3}{5}$，所以$\sin(2\alpha-\dfrac{\pi}{4})=-\dfrac{\sqrt{2}}{10}$.

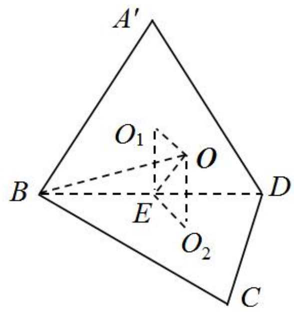
5.【答案】C

【解析】该同学抽取到两道历史题的概率为$P_1=\dfrac{\mathrm{C}_{10}^2}{\mathrm{C}_{16}^2}=\dfrac{3}{8}$，抽取到一道历史题和一道地理题的概率为$P_2=\dfrac{\mathrm{C}_{10}^1\times\mathrm{C}_6^1}{\mathrm{C}_{16}^2}=\dfrac{1}{2}$，抽取到两道地理题的概率为$P_3=\dfrac{\mathrm{C}_6^2}{\mathrm{C}_{16}^2}=\dfrac{1}{8}$，故至少答对一道题的概率为$P=P_1\times[1-(1-\dfrac{2}{3})\times(1-\dfrac{2}{3})]+P_2\times[1-(1-\dfrac{2}{3})\times(1-\dfrac{1}{2})]+P_3\times[1-(1-\dfrac{1}{2})\times(1-\dfrac{1}{2})]=\dfrac{27}{32}$.

6.【答案】A

【解析】根据题意有$\lg(x^2-ax+5)>0$，即$x^2-ax+5>1$，当$x\in(1,4)$时，有$a<x+\dfrac{4}{x}$，又因为此时$x+\dfrac{4}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\dfrac{4}{x}}=4$，当且仅当$x=2$时等号成立，故若满足$a<x+\dfrac{4}{x}$，则$a<4$. 又因为$f(x)$在区间$(1,4)$单调递减，即$g(x)=x^2-ax+5$在区间$(1,4)$单调递增，又$g(x)$图像的对称轴为$x=\dfrac{a}{2}$，故还要满足$\dfrac{a}{2}\leqslant 1$，即$a\leqslant 2$，综上，$a$的取值范围是$(-\infty,2]$.

7.【答案】B



【解析】如图，设O为球心，且O在平面$A'BD$和平面BCD上的射影分别为O_1，O_2，点E为BD的中点. 因为平面$A'BD\perp$平面BCD，且$\triangle A'BD$和$\triangle BCD$均为等边三角形，故O_1，O_2均为等边三角形的中心，四边形OO_1EO_2为正方形，且$BE\perp OE$. 所以$BE=\sqrt{3}$，$O_1E=1$，$OE=\sqrt{2}$，球半径$R=OB=\sqrt{BE^2+OE^2}=\sqrt{5}$，故球的表面积$S=4\pi R^2=20\pi$.

8.【答案】D

【解析】当$x=y=z=0$时，$|x+y|=|x-y|=|x-z|=0$，故A错误；令$y=0$，$2x=z$，则$|x+y|=|x-y|=|x-z|=|x|$，$|y+z-3|=|2x-3|$，若$x=2x-3$，即$x=3$，则四个数相等，故B错误；不妨取$x=6$，$y=-2$，$z=1$，则$|x+y|=4$，$|x-y|=8$，$|x-z|=5$，$|y+z-3|=4$，故C错误；记M为四个数中最大的数，当$xy\geqslant 0$时，则$|x+y|=|x|+|y|\geqslant|x-y|$，故$M=\max\{|x+y|,|x-z|,|y+z-3|\}\geqslant\frac{1}{3}(|x+y|+|x-z|+|y+z-3|)\geqslant\frac{|x+y-x+z+3-y-z|}{3}=1$，当$x=y=\frac{1}{2}$，且$z=\frac{3}{2}$时，$M=1$（$M$的值为1的条件不唯一）；当$xy<0$时，$|x+y|<|x-y|$，不妨设$x<0$，$y>0$，则只需考虑$0<y<1$且$z<1$的情况，此时$y+z<2$，故$|y+z-3|>1$，故当$xy<0$时，$M>1$. 综上有$M\geqslant 1$，故D正确.

9.【答案】AC（选对一项给3分）

【解析】因为$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$是两个相互垂直的单位向量，且向量$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$，故不妨设$\boldsymbol{e}_1=(1,0)$，$\boldsymbol{e}_2=(0,1)$，则$\boldsymbol{a}=(1,-2)$，$\boldsymbol{b}=(1,2)$，故$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，故A正确；$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times1+(-2)\times2=-3\neq0$，$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$不垂直，故B错误；$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(0,-4)$，$\boldsymbol{e}_2=(0,1)$，$0\times1-0\times(-4)=0$，所以$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\parallel\boldsymbol{e}_2$，故C正确；$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(1,-6)$，故$|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{1^2+(-6)^2}=\sqrt{37}$，故D错误.

10.【答案】BCD（选对一项给2分，选对两项给4分）

【解析】过E，F，H三点的截面是顺次连接H，E，F，及DD_1中点所构成的矩形；过E，G，H三点的截面是顺次连接H，E，A_1，D_1所构成的矩形；设直线FG与直线AD，DD_1分别交于M，N两点，连接HM，HN，分别交AB，C_1D_1于P，Q两点，

则过 F，G，H 三点的截面是五边形 $PFGQH$；过 E，F，G 三点的截面是顺次连接 AB，BC，CC_1，C_1D_1，A_1D_1，AA_1 各边中点所构成的正六边形，故 B，C，D 正确.

11.【答案】ACD（选对一项给 2 分，选对两项给 4 分）

【解析】当 $\lambda=\mu=-1$ 时，$f(x)=x^3-x^2-x+1=x^2(x-1)-(x-1)=(x+1)(x-1)^2$，不等式 $f(x)\geqslant 0$ 的解集为 $[-1,+\infty)$，故 A 正确；

$f'(x)=3x^2+2\lambda x+\mu$，当 $\lambda^2=3\mu$ 时，$f'(x)=3x^2+2\lambda x+\dfrac{\lambda^2}{3}=\dfrac{1}{3}(3x+\lambda)^2\geqslant 0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增，$x=-\dfrac{\lambda}{3}$ 不是 $f(x)$ 的极值点，故 B 错误；

若曲线 $y=f(x)$ 关于点 (a,b) 对称，则有 $f(a+x)+f(a-x)=2b$，两边同时求导有 $f'(a+x)-f'(a-x)=0$，即曲线 $y=f'(x)$ 关于直线 $x=a$ 对称. 由上可知 $x=-\dfrac{\lambda}{3}$ 是曲线 $y=f'(x)$ 的对称轴，且当 $2\lambda^2=9\mu$ 时，有 $f(-\dfrac{\lambda}{3}+x)+f(-\dfrac{\lambda}{3}-x)=2$，故点 $(-\dfrac{\lambda}{3},1)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的对称中心，且在直线 $y=1$ 上，故 C 正确；

设 x_0 是 $f(x)$ 任意一个零点，则 $f(x_0)=x_0^3+\lambda x_0^2+\mu x_0+1=0$. 易知 $x_0\neq 0$，故当 $4\lambda=\mu^2$ 时，

$x_0=-\dfrac{1}{x_0^2}-\dfrac{\mu}{x_0}-\lambda=-(\dfrac{1}{x_0}+\dfrac{\mu}{2})^2+\dfrac{\mu^2}{4}-\lambda\leqslant\dfrac{\mu^2}{4}-\lambda=0$，结合 $x_0\neq 0$，得 $x_0<0$，故 D 正确.

12.【答案】$30+15\sqrt{2}$

【解析】因为 $\{a_n\}$ 是等比数列，设公比为 q，则 $q^3=\dfrac{a_5}{a_2}=2\sqrt{2}$，$q=\sqrt{2}$，$a_1=\dfrac{a_2}{q}=\sqrt{2}$，

$S_8=\dfrac{a_1(1-q^8)}{1-q}=30+15\sqrt{2}$.

13.【答案】35

【解析】因为 $\sum\limits_{i=1}^{10}x_i=500$，$\sum\limits_{i=1}^{10}y_i=200$，所以 $\overline{x}=50$，$\overline{y}=20$. 又 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 中 $\hat{b}=0.5$，

回归直线一定过样本点中心 $(50,20)$，所以 $20=0.5\times 50+\hat{a}$，$\hat{a}=-5$，所以 $\hat{y}=0.5x-5$.

当 $x=80$ 时，$\hat{y}=0.5\times 80-5=35$.

14.【答案】$4\sqrt{2}$

【解析】根据题意有 $F(2,0)$，设 C 的左焦点为 F'，则 $F'(-2,0)$．C 的实轴长为 $2a=2\sqrt{2}$．

由双曲线的定义可知 $|PM|+|PF|=|PM|+|PF'|-2a$，当 M，P，F' 共线时，

$|PM|+|PF'|$ 的值最小，此时 $|PM|+|PF'|=|MF'|=8\sqrt{2}$，$|PM|+|PF|=6\sqrt{2}$，$P(3,\sqrt{7})$．

当 N，F，P 共线，且 P 在线段 NF 的延长线上时，$|PN|-|PF|$ 的值最大，此时 P 点坐标也为 $(3,\sqrt{7})$，且 $|PN|-|PF|=|NF|=2\sqrt{2}$，即 $|PF|-|PN|$ 的值最小，最小值为 $-2\sqrt{2}$．

所以当 P 的坐标为 $(3,\sqrt{7})$ 时，$|PM|+|PF|$ 和 $|PF|-|PN|$ 同时取得最小值，故

$|PM|-|PN|+2|PF|$ 的最小值为 $6\sqrt{2}-2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$．

15．（13 分）

【解析】（1）因为 $\sin C\neq 0$，由正弦定理可得 $\dfrac{\sin A}{\sin C}=\dfrac{\sqrt{3}\cos A}{\sin(A+B)}$． ……3 分

因为 $A+B+C=\pi$，故 $\sin(A+B)=\sin C$，则有 $\sin A=\sqrt{3}\cos A$， 即 $\tan A=\sqrt{3}$．……5 分

因为 $A\in(0,\pi)$，故 $A=\dfrac{\pi}{3}$． ……6 分

（2）由（1）知 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{4}bc=\sqrt{3}$，故 $bc=4$． ……8 分

由余弦定理可知 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-bc\geqslant 2bc-bc=bc=4$． ……11 分

故 $a\geqslant 2$．当且仅当 $b=c=2$ 时等号成立． ……12 分

所以 a 的最小值为 2． ……13 分

16．（15 分）

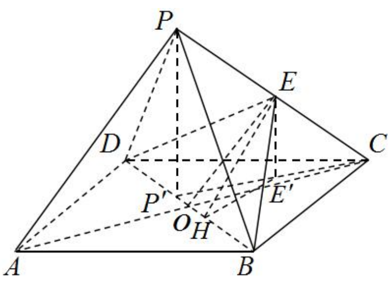
【解析】（1）如图，连接 AC 交 BD 于点 O，连接 OE．

因为 $ABCD$ 是平行四边形，故 O 为 AC 的中点． ……2 分

又因为 E 为 PC 的中点，故 $OE\parallel PA$． ……4 分

又 $OE\subset$ 平面 BDE，$PA\not\subset$ 平面 BDE，

所以 $PA\parallel$ 平面 BDE． ……6 分



（2）**方法 1**：设 P' 为 P 在底面上的射影，则 $PP'\perp$ 平面 $ABCD$．

因为 $PP'\subset$ 平面 PBD，故平面 $PBD\perp$ 平面 $ABCD$． ……7 分

设 E' 为 E 在底面上的射影，则 $EE'\perp$ 平面 $ABCD$，$EE'\parallel PP'$，且 C，E'，P' 共线，

又因为 E 为 PC 的中点，故 E' 为 CP' 的中点． ……8 分

过 E' 作 BD 的垂线，垂足为 H，连接 EH，因为 $EE'\perp$ 平面 $ABCD$，则 $EE'\perp BD$，故 $BD\perp$

平面 $EE'H$ ，$BD \perp EH$ ，$\angle EHE'$ 是二面角 $E-BD-C$ 的平面角. ……10 分

因为 $AB=8$ ，$AD=6$ ，$\angle BAD=90°$，四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为80，故 $PP'=5$，

$EE'=\frac{1}{2}PP'=\frac{5}{2}$，易知$C$ 到BD 的距离为$\frac{24}{5}$，且E'为CP'的中点，故$E'H=\frac{12}{5}$. …12 分

所以$\tan\angle EHE'=\frac{EE'}{E'H}=\frac{25}{24}$. ……13 分

因为平面 $PBD\perp$平面 $ABCD$ ，故二面角 $P-BD-E$ 的平面角与二面角 $E-BD-C$ 的平面角互余，所以二面角 $P-BD-E$ 的正切值为$\frac{24}{25}$. ……15 分

方法 2：如图，以D为坐标原点，$\overrightarrow{DA}$ 的方向为x轴正方向建立空间坐标系. 设P'为P在底面上的射影，因为 $AB=8$，$AD=6$，$\angle BAD=90°$，四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为80，故 $PP'=5$，则 $B(6,8,0)$，且可设 $P(6a,8a,5)$，又因为 E 为 PC 的中点，则 $E(3a,4+4a,\frac{5}{2})$，故

$\overrightarrow{DP}=(6a,8a,5)$，$\overrightarrow{DE}=(3a,4+4a,\frac{5}{2})$，$\overrightarrow{DB}=(6,8,0)$. ……9 分

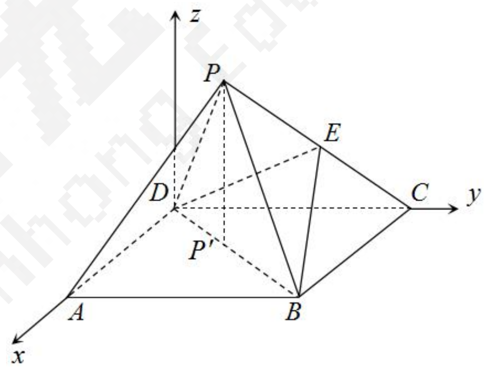
设平面 PBD 的法向量为$\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，平面 EBD 的法向量为$\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，则

$$\begin{cases}6ax_1+8ay_1+5z_1=0\\6x_1+8y_1=0\end{cases},$$

$$\begin{cases}3ax_2+(4+4a)y_2+\frac{5}{2}z_2=0\\6x_2+8y_2=0\end{cases}.$$ ……10 分

不妨取 $x_1=4$ ，$x_2=4$ ，则 $\boldsymbol{m}=(4,-3,0)$，

$\boldsymbol{n}=(4,-3,\frac{24}{5})$. ……12 分



故$\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{4\times4+(-3)\times(-3)}{\sqrt{16+9}\times\sqrt{16+9+\frac{576}{25}}}=\frac{25}{\sqrt{1201}}$，且$\sin\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{24}{\sqrt{1201}}$. ……14 分

易知二面角 $P-BD-E$ 为锐角，故其正切值为$\frac{24}{25}$. ……15 分

17.（15 分）

【解析】（1）设C 的半焦距为c，因为右焦点为$F(2,0)$，故$c=2$. ……1 分

又C 的离心率$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故$a=2\sqrt{2}$. ……3 分

由椭圆的几何性质有$a^2=b^2+c^2$，故$b^2=a^2-c^2=4$.

所以$C:\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$. ……5 分

（2）显然直线 PQ 斜率存在，并设其方程为 $y=k(x-4)$，与 C 的方程联立有：

$(1+2k^2)x^2-16k^2x+32k^2-8=0$，其中 $\Delta>0$.

设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\dfrac{16k^2}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{32k^2-8}{1+2k^2}$.　　……7 分

故 $|PF|\cdot|QF|=\sqrt{(x_1-2)^2+y_1^2}\cdot\sqrt{(x_2-2)^2+y_2^2}=\sqrt{(x_1-2)^2+4-\dfrac{x_1^2}{2}}\cdot\sqrt{(x_2-2)^2+4-\dfrac{x_2^2}{2}}$

$=\sqrt{\dfrac{1}{2}(x_1-4)^2}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{2}(x_2-4)^2}=\dfrac{1}{2}|x_1x_2-4(x_1+x_2)+16|=\dfrac{4}{1+2k^2}$.　　……11 分

故由 $|PF|\cdot|QF|=3$，可得 $k^2=\dfrac{1}{6}$，$x_1+x_2=2$，$x_1x_2=-2$.　　……12 分

所以 $|PQ|=\sqrt{1+k^2}\cdot|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$　　……13 分

$=\sqrt{14}$.　　……15 分

18.（17 分）

【解析】（1） $f(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$，当 $a=1$ 时，$f'(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{x+1}$.　　……1 分

当 $-1<x<0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点.　　……4 分

所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(0)=1$.　　……5 分

（2）（i） $f'(x)=a\mathrm{e}^{ax}-\dfrac{1}{x+1}$，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 单调递减，$f(x)$ 没有极值点.……6 分

当 $a>0$ 时，$f'(x)$ 单调递增，若 x_0 是 $f(x)$ 的极值点，则 x_0 是唯一极值点，且为极小值点，

此时有 $f'(x_0)=a\mathrm{e}^{ax_0}-\dfrac{1}{x_0+1}=0$.　　……7 分

因为 $f'(x)$ 单调递增，故 $x_0\geqslant\dfrac{1-a}{2a}$ 等价于 $f'(\dfrac{1-a}{2a})=a(\mathrm{e}^{\frac{1-a}{2}}-\dfrac{2}{a+1})\leqslant f'(x_0)=0$.……8 分

设 $g(x)=(x+1)\mathrm{e}^{\frac{1-x}{2}}-2(x>0)$，则 $g'(x)=\dfrac{1}{2}(1-x)\mathrm{e}^{\frac{1-x}{2}}$.　　……9 分

当 $0<x<1$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，当 $x>1$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，故 $g(a)$

$\leqslant g(1)=0$，即 $\mathrm{e}^{\frac{1-a}{2}}-\dfrac{2}{a+1}\leqslant 0$. 故 $f'(\dfrac{1-a}{2a})=a(\mathrm{e}^{\frac{1-a}{2}}-\dfrac{2}{a+1})\leqslant 0$，$x_0\geqslant\dfrac{1-a}{2a}$.……11 分

（ii）由（i）可知 $e^{ax_0}=\dfrac{1}{a(x_0+1)}$，故 $f(x_0)=\dfrac{1}{a(x_0+1)}-\ln(x_0+1)$.　　……12 分

因为当 $a>0$ 时，函数 $h(x)=\dfrac{1}{a(x+1)}-\ln(x+1)$ 单调递减，且由（i）可知 $x_0\geqslant\dfrac{1-a}{2a}$，故

$f(x_0)=h(x_0)\leqslant h(\dfrac{1-a}{2a})=\dfrac{2}{a+1}-\ln\dfrac{a+1}{2a}$.　　……14 分

设 $\varphi(x)=\dfrac{2}{x+1}-\ln\dfrac{x+1}{2x}(x>0)$，则 $\varphi'(x)=\dfrac{1-x}{x(x+1)^2}$.　　……15 分

当 $0<x<1$ 时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 单调递增，当 $x>1$ 时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$ 单调递减，故 $\varphi(a)$ $\leqslant\varphi(1)=1$，故 $f(x_0)=h(x_0)\leqslant h(\dfrac{1-a}{2a})=\varphi(a)\leqslant 1$.　　……17 分

19.（17 分）

【解析】（1）$Y:2,3,1,0$，$Y:0,3,2,1$，$Y:2,1,0,3$，$Y:3,2,0,1$.　　……3 分

注：写对一个给 2 分，写对两个给 3 分，有写错的给 0 分.

（2）若 $x_i+x_j=y_i+y_j$，则 $x_i-y_i=y_j-x_j$，故 $|x_i-y_i|=|x_j-y_j|$.　　……5 分

假设 X 和 Y 关于 S 全封闭，因为 $i\neq j$，则由题中定义可知 $|x_i-y_i|$ 和 $|x_j-y_j|$ 不能为 S 中相同的元素，即 $|x_i-y_i|\neq|x_j-y_j|$，这与 $|x_i-y_i|=|x_j-y_j|$ 矛盾，假设不成立.

故 X 和 Y 关于 S 半封闭.　　……7 分

（3）若 $E(\xi)=E(\eta)$，由结论所具有的对称性及由（1）所得到的结果猜想：若 X 和 Z 关于 S 全封闭，则存在 $Y\neq X$，使得 Y 和 Z 关于 S 全封闭.

由数列 Z 和 X 可构成一个数表（i）：

0	1	$\cdots$	j	$\cdots$	n
x_0	x_1	$\cdots$	x_j	$\cdots$	x_n

交换数表（i）中两行，得到数表（ii）：

x_0	x_1	$\cdots$	x_j	$\cdots$	x_n
0	1	$\cdots$	j	$\cdots$	n

记该过程为第一次操作.　　……9 分

调整数表（ii）中各列的顺序，使数表的第一行变为$0,1,\cdots,n$，此时设数表的第二行变为$y_0,y_1,\cdots,y_n$，得到数表（iii）：

$x_j=0$	1	$\cdots$	j	$\cdots$	n
$y_0=j$	y_1	$\cdots$	y_j	$\cdots$	y_n

记该过程为第二次操作.　　　　……10 分

假设$X=Y$，则$x_0=y_0$，$x_1=y_1$，$\cdots$，$x_n=y_n$. 不妨设$x_0\neq 0$，$x_j=0(j\neq 0)$，则经过第一次操作后，在数表（ii）中$x_j=0$与j同列；再经过第二次操作后，在数表（iii）中0与j同列，因此$y_0=j$，故$|y_0-0|=|x_j-j|$. 又因为X和Z关于S全封闭，由（2）可知，$|x_0-0|\neq|x_i-i|(i=1,2,\cdots,n)$，且经过两次操作后$Y$和$Z$也关于$S$全封闭.　　　　……12 分

因为$x_0=y_0=j$，故$|x_0-0|=|x_j-j|(j\neq 0)$，这与$|x_0-0|\neq|x_i-i|(i=1,2,\cdots,n)$矛盾. 故若$X$和$Z$关于$S$全封闭，则存在$Y\neq X$，使得$Y$和$Z$关于$S$全封闭.　　　　……13 分

因为X和Z关于S全封闭，则$\sum\limits_{i=0}^{n}(x_i^2-2ix_i+i^2)=\sum\limits_{i=0}^{n}|x_i-i|^2=0^2+1^2+\cdots+n^2=\sum\limits_{i=0}^{n}x_i^2$.

所以$\sum\limits_{i=0}^{n}2ix_i=\sum\limits_{i=0}^{n}i^2$，同理有$\sum\limits_{i=0}^{n}2iy_i=\sum\limits_{i=0}^{n}i^2$，故$\sum\limits_{i=0}^{n}2ix_i=\sum\limits_{i=0}^{n}2iy_i$.　　　　……15 分

因为随机变量ξ和η分别服从$P(\xi=i)=\dfrac{2x_i}{n(n+1)}$和$P(\eta=i)=\dfrac{2y_i}{n(n+1)}$，$i=0,1,\cdots,n$，

故$E(\xi)=\sum\limits_{i=0}^{n}\dfrac{2ix_i}{n(n+1)}=\sum\limits_{i=0}^{n}\dfrac{2iy_i}{n(n+1)}=E(\eta)=\dfrac{1}{n(n+1)}\sum\limits_{i=0}^{n}i^2$.　　　　……16 分

因为$\sum\limits_{i=0}^{n}i^2=\sum\limits_{i=0}^{n}x_i^2=\sum\limits_{i=0}^{n}y_i^2$，且$X\neq Y$，故$\sum\limits_{i=0}^{n}i^2=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=0}^{n}(x_i^2+y_i^2)>\sum\limits_{i=0}^{n}x_iy_i$.

又$\sum\limits_{i=0}^{n}(x_i+y_i)=2\sum\limits_{i=0}^{n}i=n(n+1)$，故$E(\xi)=E(\eta)>\dfrac{\sum\limits_{i=0}^{n}x_iy_i}{\sum\limits_{i=0}^{n}(x_i+y_i)}$.　　　　……17 分