

绝密★启用前

数学试卷

注意事项:

1.答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2.回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效。

3.考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 设 $z = \frac{2}{1-i}$, 则 $|z - \bar{z}| =$
A. 4 B. 2 C. 1 D. 0
2. 已知集合 $A = \{-2, -1, 0, 1\}$, $B = \{x | \sin \frac{\pi x}{2} = 0\}$, 则 $A \cap B =$
A. $\{0, 1\}$ B. $\{-1, 1\}$ C. $\{-2, 0\}$ D. $\{-2, 1\}$
3. 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F . 若 C 的准线被以 F 为圆心的圆截得的弦长为 2, 则该圆的方程为
A. $(x+1)^2 + y^2 = 8$ B. $(x-1)^2 + y^2 = 8$
C. $(x+1)^2 + y^2 = 5$ D. $(x-1)^2 + y^2 = 5$
4. 已知角 α 的终边在射线 $y = -2x (x \leq 0)$ 上, 则 $\sin(2\alpha - \frac{\pi}{4}) =$
A. $-\frac{\sqrt{2}}{10}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{10}$ C. $-\frac{\sqrt{2}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{5}$
5. 光明中学举办了一场“史地知识竞赛”, 共设置了 10 道历史题和 6 道地理题. 某参赛同学从所有题中随机抽取两道题作答, 若该同学答对任意一道历史题的概率为 $\frac{2}{3}$, 答对任意一道地理题的概率为 $\frac{1}{2}$, 则该同学至少答对一道题的概率为
A. $\frac{13}{16}$ B. $\frac{22}{27}$ C. $\frac{27}{32}$ D. $\frac{31}{36}$
6. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\lg(x^2 - ax + 5)}}$ 在区间 $(1, 4)$ 单调递减, 则 a 的取值范围是
A. $(-\infty, 2]$ B. $(-\infty, 4)$ C. $[2, 4)$ D. $[4, +\infty)$
7. 已知菱形 $ABCD$ 的边长为 $2\sqrt{3}$, $\angle BAD = 60^\circ$, 以 BD 为折痕把 $\triangle ABD$ 折起, 使点 A 到达点 A' 的位置, 且平面 $A'BD \perp$ 平面 BCD . 若点 A' , B , C , D 都在同一球面上, 则该球的表面积为
A. 16π B. 20π C. 24π D. 28π

8. 在 $|x+y|$, $|x-y|$, $|x-z|$, $|y+z-3|$ 四个数中

A. 任意三个数不能同时等于 0

B. 任意两个数之和不等于另两个数之和

C. 至少有一个数不大于 3

D. 至少有一个数不小于 1

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 设 e_1 , e_2 是两个相互垂直的单位向量. 若向量 $a = e_1 - 2e_2$, $b = e_1 + 2e_2$, 则

A. $|a| = |b|$

B. $a \perp b$

C. $(a-b) \parallel e_2$

D. $|2a-b|=3$

10. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E , F , G , H 分别为 AB , AA_1 , A_1D_1 , CD 的中点, 则过 E , F , G , H 其中三个点的平面被正方体截得的截面可能是

A. 菱形

B. 矩形

C. 五边形

D. 正六边形

11. 已知函数 $f(x) = x^3 + \lambda x^2 + \mu x + 1$, 则

A. 当 $\lambda = \mu = -1$ 时, 不等式 $f(x) \geq 0$ 的解集为 $[-1, +\infty)$

B. 当 $\lambda^2 = 3\mu$ 时, $x = -\frac{\lambda}{3}$ 是 $f(x)$ 的极值点

C. 当 $2\lambda^2 = 9\mu$ 时, 曲线 $y = f(x)$ 的对称中心在直线 $y = 1$ 上

D. 当 $4\lambda = \mu^2$ 时, $f(x)$ 的所有零点都小于 0

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 记 S_n 是等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $a_2 = 2$, $a_5 = 4\sqrt{2}$, 则 $S_8 =$ _____.

13. 某水文站为了研究所在河段 24h 降雨量 x (单位: mm) 与水位增长量 y (单位: cm) 之间的关系, 记录了 10 次相关数据, 通过绘制散点图可看出 y 与 x 之间有线形相关关系, 并设其回归方程为 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$. 已

知 x_i 和 y_i 分别表示第 i ($i = 1, 2, \dots, 10$) 次 24h 降雨量 (单位: mm) 和水位增长量 (单位: cm), 且 $\sum_{i=1}^{10} x_i = 500$,

$\sum_{i=1}^{10} y_i = 200$, $\hat{b} = 0.5$. 若某次 24h 降雨量为 80 mm, 据此估计水位增长量为_____cm.

14. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$ 的右焦点为 F , 点 $M(8, 2\sqrt{7})$, $N(1, -\sqrt{7})$. 设 P 为 C 的右支上一动点, 则 $|PM| - |PN| + 2|PF|$ 的最小值为_____.

四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (13 分)

记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $\frac{a}{c} = \frac{\sqrt{3} \cos A}{\sin(A+B)}$.

(1) 求 A ;

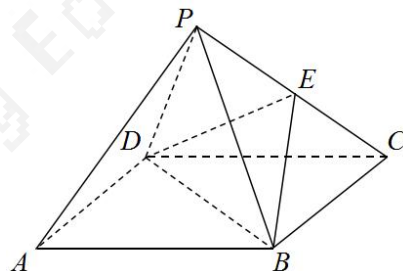
(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 求 a 的最小值.

16. (15 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是平行四边形, E 为 PC 的中点.

(1) 证明: $PA \parallel$ 平面 BDE ;

(2) 若 P 在底面上的射影恰好在线段 BD 上, 且 $AB=8$, $AD=6$, $\angle BAD=90^\circ$, 四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 80, 求二面角 $P-BD-E$ 的正切值.



17. (15 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 $F(2, 0)$, 离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(1) 求 C 的方程;

(2) 若过点 $(4, 0)$ 的直线与 C 交于 P, Q 两点, 且 $|PF| \cdot |QF| = 3$, 求 $|PQ|$.

18. (17 分)

已知函数 $f(x) = e^{ax} - \ln(x+1)$.(1) 当 $a=1$ 时, 求 $f(x)$ 的最小值;(2) 若 x_0 是 $f(x)$ 的极值点, 证明:

(i) $x_0 \geq \frac{1-a}{2a}$;

(ii) $f(x_0) \leq 1$.

19. (17 分)

已知集合 $S = \{0, 1, \dots, n\}$ ($n = 3, 4, \dots$). 设 S 的所有元素按一定顺序排列得到数列 $X: x_0, x_1, \dots, x_n$ 和 $Y: y_0, y_1, \dots, y_n$. 若 X 和 Y 满足 $\{\varepsilon | \varepsilon = |x_i - y_i|, i = 0, 1, \dots, n\} = S$, 则称 X 和 Y 关于 S 全封闭, 否则称 X 和 Y 关于 S 半封闭.

(1) 若 $n=3$, $X: 2, 0, 3, 1$, 写出两个不同的 Y , 使得 X 和 Y 关于 S 全封闭;(2) 设 $i, j \in S$, 且 $i \neq j$, 证明: 若 $x_i + x_j = y_i + y_j$, 则 X 和 Y 关于 S 半封闭;(3) 设数列 $Z: 0, 1, \dots, n$, 随机变量 ξ 和 η 分别服从 $P(\xi = i) = \frac{2x_i}{n(n+1)}$ 和 $P(\eta = i) = \frac{2y_i}{n(n+1)}$,

$i = 0, 1, \dots, n$, 证明: 若 X 和 Z 关于 S 全封闭, 则存在 $X \neq Y$, 使得 $E(\xi) = E(\eta) > \frac{\sum_{i=0}^n x_i y_i}{\sum_{i=0}^n (x_i + y_i)}$.