数学参考答案

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	C	A	D	D	C	B	C

【解析】

1．$A=[-2,3]$，$B=[2,+\infty)$，则$\complement_{\mathbf{R}}B=(-\infty,2)$，所以$(\complement_{\mathbf{R}}B)\cap A=[-2,2)$，故选 B．

2．由$\dfrac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}\Rightarrow a^2+b^2\geqslant 2$，则 A 错；$2^{a-b}=2^{2a-2}$，$a\in(0,2)\Rightarrow 2^{a-b}\in\left(\dfrac{1}{4},4\right)$，则 B 错；$\log_2 a+\log_2 b=\log_2 ab\leqslant\log_2\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2=0$，C 正确；$\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\leqslant\sqrt{\dfrac{a+b}{2}}=1\Rightarrow\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant 2$，则 D 错，故选 C．

3．由 $A=\dfrac{\pi}{3}$，$C=\dfrac{5\pi}{12}$，得 $B=\pi-\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{5\pi}{12}=\dfrac{\pi}{4}$，又 $\sin\dfrac{5\pi}{12}=\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt2}{2}\times\dfrac{\sqrt3}{2}+\dfrac{\sqrt2}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt6+\sqrt2}{4}$，$b=\sqrt2$，由正弦定理得 $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，所以 $c=\dfrac{b\sin C}{\sin B}=\dfrac{\sqrt2\times\left(\dfrac{\sqrt6+\sqrt2}{4}\right)}{\dfrac{\sqrt2}{2}}=\dfrac{\sqrt6+\sqrt2}{2}$，故选 A．

4．A：$m/\!/n$，$m/\!/\alpha$，则$n/\!/\alpha$或$n\subset\alpha$，所以 A 错误；B：如图 1，在正三棱柱中，当$\alpha\cap\beta=m$，$n\subset\alpha$，$n\perp m$时，α与β不垂直，所以 B 错误；C：$\alpha\perp\gamma$，$\beta\perp\gamma$，则α,β相交或平行，所以 C 错误；D：$m/\!/n$，$m\perp\alpha$，则$n\perp\alpha$，又$\alpha/\!/\beta$，故$n\perp\beta$，所以 D 正确，故选 D．

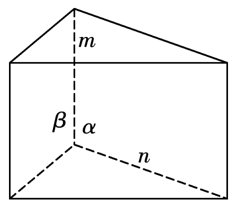

图 1

5．方法 1：由分布列得$E(X)=1+\dfrac{a}{3}$，则$D(X)=\left(1+\dfrac{a}{3}-1\right)^2\times\dfrac{1}{3}+\left(1+\dfrac{a}{3}-a\right)^2\times\dfrac{1}{3}+\left(1+\dfrac{a}{3}-2\right)^2\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{9}\left(a-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{1}{6}$，则当$a$在$(1,2)$内增大时，$D(X)$先减小后增大，故选 D．方法 2：

$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{1}{3}+\frac{a^2}{3}+\frac{4}{3}-\left(1+\frac{a}{3}\right)^2=\frac{2a^2-6a+6}{9}=\frac{2}{9}\left[\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]$，故选 D.

6．$a_2=\frac{1}{1-a_1}=2025$，$a_3=\frac{1}{1-a_2}=-\frac{1}{2024}$，$a_4=\frac{1}{1-a_3}=\frac{2024}{2025}=a_1$，则数列$\{a_n\}$是周期数列，周期为 3，且$a_1a_2a_3=-1$，则$T_{2024}=(-1)^{674}\cdot a_1a_2=2024$，故选 C.

7．因为圆C：$x^2+y^2-2x=0$的圆心$C(1,\ 0)$，半径$r=1$，由题意可得，P，A，C，B四点共圆且线段AB被PC垂直且平分，设$\angle ACP=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$，则$AB=2\sin\theta$，因为线段$AB$长度的最小值为$\sqrt{3}$，所以$\sin\theta\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$，又$0<\theta<\frac{\pi}{2}$，所以$\frac{\pi}{3}\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}$，$0<\cos\theta\leqslant\frac{1}{2}$，又$|CP|=\frac{1}{\cos\theta}$，所以$|CP|\geqslant 2$，即$\frac{|m+2m|}{\sqrt{1+m^2}}=2$，又$m>0$，所以$m=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，故选 B.

8．由题意知$f(x)=\begin{cases}\cos\omega x, & x\in\left(-\frac{3\pi}{4\omega}+\frac{2k\pi}{\omega},\ \frac{\pi}{4\omega}+\frac{2k\pi}{\omega}\right)\\ \sin\omega x, & x\in\left[\frac{\pi}{4\omega}+\frac{2k\pi}{\omega},\ \frac{5\pi}{4\omega}+\frac{2k\pi}{\omega}\right]\end{cases}$，$k\in\mathbf{Z}$，函数$f(x)$的单调递增区间为$\left(-\frac{3\pi}{4\omega}+\frac{2k\pi}{\omega},\ \frac{2k\pi}{\omega}\right]$，$\left[\frac{\pi}{4\omega}+\frac{2k\pi}{\omega},\ \frac{\pi}{2\omega}+\frac{2k\pi}{\omega}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$，则$\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{3}\right)\subseteq\left(-\frac{3\pi}{4\omega}+\frac{2k\pi}{\omega},\ \frac{2k\pi}{\omega}\right]$或$\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{3}\right)\subseteq\left[\frac{\pi}{4\omega}+\frac{2k\pi}{\omega},\ \frac{\pi}{2\omega}+\frac{2k\pi}{\omega}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$，由$\begin{cases}-\frac{3\pi}{4\omega}+\frac{2k\pi}{\omega}\leqslant\frac{\pi}{4},\\ \frac{2k\pi}{\omega}\geqslant\frac{\pi}{3}\end{cases}$解得$-3+8k\leqslant\omega\leqslant 6k$，$k\in\mathbf{Z}$，由$-3+8k\leqslant 6k\Rightarrow k\leqslant\frac{3}{2}$，而$\omega>0$，故$k=1$，此时$5\leqslant\omega\leqslant 6$；由$\begin{cases}\frac{\pi}{4\omega}+\frac{2k\pi}{\omega}\leqslant\frac{\pi}{4},\\ \frac{\pi}{2\omega}+\frac{2k\pi}{\omega}\geqslant\frac{\pi}{3}\end{cases}$解得$1+8k\leqslant\omega\leqslant\frac{3}{2}+6k$，$k\in\mathbf{Z}$，由$1+8k\leqslant\frac{3}{2}+6k\Rightarrow k\leqslant\frac{1}{4}$，而$\omega>0$，故$k=0$，即$1\leqslant\omega\leqslant\frac{3}{2}$，综上，$\omega\in\left[1,\ \frac{3}{2}\right]\cup[5,\ 6]$，故选 C.

二、多项选择题（本大题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项是符合题目要求的．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分）

题号	9	10	11
答案	ACD	ACD	BCD

【解析】

9．A 选项，复数 $z=1-2\mathrm{i}$，则 $\overline{z}=1+2\mathrm{i}$，故 $\overline{z}=1+2\mathrm{i}$ 在复平面内对应的点为 $(1,2)$，位于第一象限，A 正确；B 选项，设复数 $z_1=1$，$z_2=\mathrm{i}$，满足 $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|=\sqrt{2}$，但 $z_1z_2=\mathrm{i}$，B 错误；对于 C，$z\in\mathbf{C}$，设 $z=x+y\mathrm{i}$，由于 $|z|=1$，则 $\sqrt{x^2+y^2}=1$，$\therefore x^2+y^2=1$，故 $|z-2|=\sqrt{(x-2)^2+y^2}=\sqrt{(x-2)^2+1-x^2}=\sqrt{-4x+5}$，由 $x^2+y^2=1$，得 $-1\leqslant x\leqslant 1$，则 $-4x+5\geqslant 1$，故当 $x=1$ 时，$|z-2|$ 的最小值为 1，C 正确；对于 D，$-4+3\mathrm{i}$ 是关于 x 的方程 $x^2+px+q=0(p,q\in\mathbf{R})$ 的根，则 $-4-3\mathrm{i}$ 为另一个根，由韦达定理，$-4-3\mathrm{i}+(-4+3\mathrm{i})=-8=-p\Rightarrow p=8$，D 正确，故选 ACD.

10．如图 2，分别取棱 BB_1，B_1C_1，C_1D_1，DD_1 的中点 M，N，P，Q，根据条件 $A_1C\perp$ 平面 EFG，可得平面 EFG 即为平面 $EMNPQF$，于是点 G 的轨迹即为线段 NP，对于 A，当点 G 为棱 C_1D_1 的中点 P 时，连接 AD_1，则 $EG//AD_1$，又 $EG\not\subset$ 平面 ADD_1A_1，$AD_1\subset$ 平面 ADD_1A_1，所以 $EG//$ 平面 ADD_1A_1，故 A 正确；对于 B，平面 EFG 截正方体所得截面为正六边形 $EFQPNM$，其边长为 $EF=\sqrt{2}$，所以正六边形的面积为 $6\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sin 60^\circ=3\sqrt{3}$，故 B 错误；对于 C，连接 A_1C_1，与 NP 的交点即为点 G，此时 $\overrightarrow{A_1G}=3\overrightarrow{GC_1}$，于是 $\lambda=3$ 满足，C 正确；对于 D，因为 $CE=\sqrt{5}$，点 C 到平面 EFG 的距离等于 $\frac{1}{2}A_1C=\sqrt{3}$，所以直线 CE 与平面 EFG 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$，D 正确，故选 ACD.

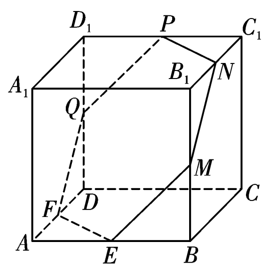

图 2

11．$f'(x)=4x^3+2ax+a$，$f''(x)=12x^2+2a$，当 $a>0$ 时，$f''(x)>0$，$f'(x)$ 单增，又 $f'(-\sqrt[3]{a})=-3a-2a\sqrt[3]{a}<0$，$f'(0)=a>0$，$\therefore f'(x)$ 在 $(-\sqrt[3]{a},0)$ 内存在唯一零点，记为 x_0，

则 $f(x)$ 在 $(-\infty, x_0)$ 上单减，在 $(x_0, +\infty)$ 上单增，$f(x_0)$ 既是极小值又是最小值；当 $a<0$ 时，$f'(x)$ 在 $\left(-\infty, -\sqrt{-\frac{a}{6}}\right)$ 和 $\left(\sqrt{-\frac{a}{6}}, +\infty\right)$ 上单增，在 $\left(-\sqrt{-\frac{a}{6}}, \sqrt{-\frac{a}{6}}\right)$ 上单减，$f'(0)=a<0$，$f'\left(-\sqrt{-\frac{a}{6}}\right)=a\left(1-\frac{4}{3}\sqrt{-\frac{a}{6}}\right)$，$f'\left(\sqrt{-\frac{a}{6}}\right)=a\left(1+\frac{4}{3}\sqrt{-\frac{a}{6}}\right)$，根据 $f'(x)=4x^3+2ax+a$ 的图象分析，无论哪种情况，$f'(x)$ 都不存在恰好两个变号零点的情况，故 $f(x)$ 不可能恰好有两个极值点，A 选项错误；对于 B 选项，若 $f(x)$ 恰有三个极值点，只需要 $\begin{cases} a<0 \\ f'\left(\sqrt{-\frac{a}{6}}\right)<0 \\ f'\left(-\sqrt{-\frac{a}{6}}\right)>0 \end{cases} \Rightarrow a<-\frac{27}{8}$，B 选项正确；对于 C 选项，注意 $f(0)=1$，当 $a>0$ 时，$f'(0)=a>0$，故 $x=0$ 处于单调递增区间，故 $x=0$ 左侧总有 $f(x)$ 的极小值 $f(x_0)<1$，此时命题成立，当 $a<0$ 时，$f'(0)=a<0$，故 $x=0$ 处于单调递减区间，故极小值 $f\left(\sqrt{-\frac{a}{6}}\right)<f(0)=1$，命题也成立，故总存在实数 x 使得 $f(x)<1$，C 选项正确；对于 D 选项，当 $a=-1$ 时，$f(x)$ 的图象如图 3，显然没有对称轴，D 选项正确，故选 BCD.

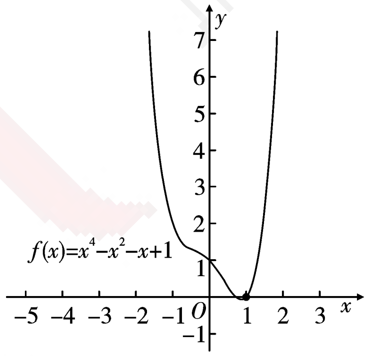

图 3

三、填空题（本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分）

题号	12	13	14
答案	$(-\infty, -2)\cup(3, +\infty)$	3	$\frac{\sqrt{33}}{3}$

【解析】

12． $f(x)$ 为单调递增函数，故 $f(x^2-2x)>f(6-x)\Leftrightarrow x^2-2x>6-x$，解得 $x\in(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$．

13．因为 $\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{BD}\Rightarrow\overrightarrow{AD}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AC}$．又因为 $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AN}=y\overrightarrow{AC}$，

所以 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{3x}\overrightarrow{AM}+\dfrac{1}{6y}\overrightarrow{AN}$，因为 M，P，N 三点共线，故 $\dfrac{1}{3x}+\dfrac{1}{6y}=1\Rightarrow 2y+x=6xy$，因为 $\triangle AMN$ 与 $\triangle ABC$ 的面积比为 $1:2$，可得 $2y+x=6xy=3$．

14．由 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF_1}=2\overrightarrow{AE}$，可知点 E 为线段 BF_1 的中点，由 $\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EF_1}\Rightarrow\overrightarrow{EA}\cdot(\overrightarrow{EB}-\overrightarrow{EF_1})=\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{F_1B}=0\Rightarrow\overrightarrow{EA}\perp\overrightarrow{F_1B}$，所以 AE 为 $\triangle ABF_1$ 的中垂线，则有 $|\overrightarrow{AF_1}|=|\overrightarrow{AB}|$，$\angle ABF_1=\angle AF_1B$．如图 4 所示：由双曲线的定义可得 $2a=|AF_1|-|AF_2|=|AB|-|AF_2|=|BF_2|$，所以，$|BF_1|=|BF_2|+2a=4a$．又 $\dfrac{7}{9}=\cos\angle F_1AF_2=\cos\angle F_1AB=\cos(\pi-2\angle ABF_1)=-\cos(2\angle ABF_1)$，所以 $\dfrac{7}{9}=1-2\cos^2\angle ABF_1$

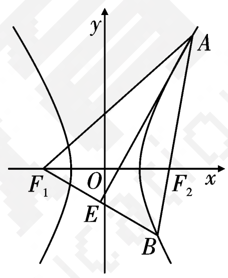

图 4

$\Rightarrow\cos\angle ABF_1=\dfrac{1}{3}$．在 $\triangle F_1F_2B$ 中，由余弦定理可得 $|F_1F_2|^2=|BF_1|^2+|BF_2|^2-2|BF_1|\cdot|BF_2|\cos\angle ABF_1=16a^2+4a^2-2\times4a\times2a\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{44a^2}{3}$，所以，$2c=\sqrt{\dfrac{44}{3}a^2}=\dfrac{2\sqrt{33}}{3}a$，因此该双曲线的离心率为 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{33}}{3}$．

四、解答题（共 77 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

15．（本小题满分 13 分）

解：（1） $f'(x)=e^x-a$，

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，……………………………（3 分）

当 $a>0$ 时， 在 $(-\infty,\ln a)$ 上 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

在 $(\ln a,+\infty)$ 上 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增．……………………………………（6 分）

（2）设切点为 $P(x_0, y_0)$，则 $\begin{cases} y_0 = 2x_0 \\ y_0 = e^{x_0} - ax_0 - 1 \\ 2 = e^{x_0} - a \end{cases} \Rightarrow e^{x_0}(x_0 - 1) + 1 = 0$，……………………（9 分）

显然 $x_0 = 0$ 为方程的根，……………………………………（10 分）

又令 $h(x) = e^x(x-1)+1$，$h'(x) = xe^x$，故 $h(x)$ 在 $x=0$ 处取最小值 $h(0)=0$，

故方程 $e^{x_0}(x_0-1)+1=0$ 只有 $x_0=0$ 这一个根，……………………………………（12 分）

故 $a=-1$.……………………………………（13 分）

16.（本小题满分 15 分）

解：（1）当 $n=6$ 时，一共有 20 种可能，其中能够构成三角形有：$\{2, 3, 4\}$，$\{2, 4, 5\}$，$\{2, 5, 6\}$，$\{3, 4, 5\}$，$\{3, 4, 6\}$，$\{3, 5, 6\}$，$\{4, 5, 6\}$，一共 7 个.……………（6 分）

（2）设 x，y，20 为满足题意的三角形的边长，不妨设 $x<y<20$，则 $x+y>20$.

当 $n=20$ 时，若 $y\leqslant 10$，不能构成三角形，

若 $y=11$，$x=10$，

若 $y=12$，$x=9, 10, 11$，

…

若 $y=19$，$x=2$，3，…，18，

所以一共有 81 个，

又因为在整数 $1, 2, \cdots, 20$ 中任取三个不同的数的总的方法数为 $C_{20}^3 = 1140$，

故所求的概率为 $\dfrac{27}{380}$.……………………………………（15 分）

17.（本小题满分 15 分）

（1）证明：由题可知四边形 $ABCD$ 为矩形，

过点 E 在平面 APD 内作 $EF//AP$ 交棱 AD 于点 F，连接 CF，

因为 $\overline{PE} = 2\overline{ED}$，所以 $AF = 2FD$，

又 $AD = 3\sqrt{3}$，所以 $DF = \sqrt{3}$，于是 $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{3}{3\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{DF}{CD}$.

又 $\angle BAD = \angle FDC = 90^\circ$，所以 $\triangle ABD \backsim \triangle DFC$，所以 $\angle ADB = \angle DCF$，

因为 $\angle ADB+\angle BDC=90°$，于是 $\angle DCF+\angle BDC=90°$，所以 $CF\perp BD$，

因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$EF//AP$，所以 $EF\perp$ 平面 $ABCD$，

于是 $EF\perp BD$，又 $EF\cap CF=F$，且 EF、$CF\subset$ 平面 CEF，

所以 $BD\perp$ 平面 CEF，

又因为 $CE\subset$ 平面 CEF，因此 $CE\perp BD$.

……………………………………………（6 分）

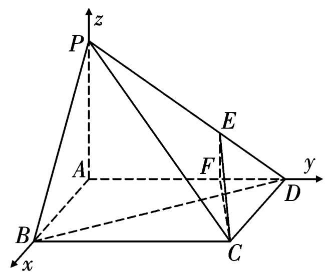

图 5

（2）解：以点 A 为原点，分别以 AB，AD，AP 所在直线为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系，如图 5 所示.

设 $P(0,\ 0,\ 3a)$，则 $B(3,\ 0,\ 0)$，$C(3,\ 3\sqrt{3},\ 0)$，$E(0,\ 2\sqrt{3},\ a)$，

所以 $\overrightarrow{BC}=(0,\ 3\sqrt{3},\ 0)$，$\overrightarrow{BP}=(-3,\ 0,\ 3a)$，$\overrightarrow{CE}=(-3,\ -\sqrt{3},\ a)$，

设平面 BPC 的法向量为 $\vec{m}=(x,\ y,\ z)$，则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BP}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}3\sqrt{3}y=0\\ -3x+3az=0\end{cases}$，取 $\vec{m}=(a,\ 0,\ 1)$，

于是 $\cos\langle\vec{m},\ \overrightarrow{CE}\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\overrightarrow{CE}}{|\vec{m}|\cdot|\overrightarrow{CE}|}=\dfrac{-2a}{\sqrt{a^2+1}\cdot\sqrt{a^2+12}}$.

设 CE 与平面 BPC 所成角为 θ，因为 $\tan\theta=\dfrac{1}{2}$，所以 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\vec{m},\ \overrightarrow{CE}\rangle|=\dfrac{2a}{\sqrt{a^2+1}\cdot\sqrt{a^2+12}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

化简整理得 $a^4-7a^2+12=0$，解得 $a=\sqrt{3}$ 或 2，

所以棱 AP 的长为 $3\sqrt{3}$ 或 6.　……………………………………（15 分）

18.（本小题满分 17 分）

（1）解：易知 $p=4$，抛物线 C：$y^2=8x$,　……………………………………（1 分）

设点 $P\left(\dfrac{t^2}{8},\ t\right)$, $t\in\mathbf{R}$，则 $|PB|^2=\left(\dfrac{t^2}{8}+2\right)^2+(t-8)^2=\dfrac{1}{64}t^4+\dfrac{3}{2}t^2-16t+68$.

……………………………………………………（3 分）

记 $f(t)=\dfrac{1}{64}t^4+\dfrac{3}{2}t^2-16t+68(t\in\mathbf{R})$，则 $f'(t)=\dfrac{1}{16}t^3+3t-16=\dfrac{1}{16}(t-4)(t^2+4t+64)$.

……………………………………………………（5 分）

因为$t^2+4t+64=(t+2)^2+60>0$，所以令$f'(t)=0$，解得$t=4$.

因为$f(t)$在$(-\infty，4)$单调递减，在$(4，+\infty)$单调递增. ……………………………(6分)

所以$f(t)$的最小值为$f(4)=32$，故$|PB|$的最小值为$4\sqrt{2}$. ……………………………(7分)

(2)解：依题意可知$\tan\angle OAB=\frac{4}{3}$，$\tan\angle OAP=\frac{t}{\frac{t^2}{8}+8}=\frac{8t}{t^2+64}$， ……………………(8分)

由$\angle PAB=\angle OAB-\angle OAP(t>0)$或者$\angle PAB=\angle OAB+\angle OAP(t<0)$【或者倒角公式】得：

$$\tan\angle PAB=\frac{k_{AB}-k_{AP}}{1+k_{AB}\times k_{AP}}=\frac{\frac{4}{3}-k_{AP}}{1+\frac{4}{3}\cdot k_{AP}}=-\frac{3}{4}+\frac{\frac{25}{16}}{k_{AP}+\frac{3}{4}}.$$ ……………………………(9分)

①当$t=0$时，$k_{AP}=\tan\angle OAP=\frac{t}{\frac{t^2}{8}+8}=\frac{8t}{t^2+64}=0$，

则$\tan\angle PAB=-\frac{3}{4}+\frac{\frac{25}{16}}{k_{AP}+\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}$； ……………………………(10分)

②当$t>0$时，$k_{AP}=\tan\angle OAP=\frac{t}{\frac{t^2}{8}+8}=\frac{8t}{t^2+64}=\frac{8}{t+\frac{64}{t}}\leqslant\frac{1}{2}$，所以$k_{AP}\in\left(0，\frac{1}{2}\right]$，

则$\tan\angle PAB=-\frac{3}{4}+\frac{\frac{25}{16}}{k_{AP}+\frac{3}{4}}\in\left[\frac{1}{2}，\frac{4}{3}\right)$； ……………………………(12分)

③当$t<0$时，$k_{AP}=\tan\angle OAP=\frac{8t}{t^2+64}=\frac{-8}{-t+\frac{64}{-t}}\geqslant-\frac{1}{2}$，所以$k_{AP}\in\left[-\frac{1}{2}，0\right)$，

则$\tan\angle PAB=-\frac{3}{4}+\frac{\frac{25}{16}}{k_{AP}+\frac{3}{4}}\in\left(\frac{4}{3}，\frac{11}{2}\right]$.

综上，$\tan\angle PAB$的取值范围是$\left[\frac{1}{2}，\frac{11}{2}\right]$. ……………………………(14分)

(3)证明：由(2)知$\tan\angle PAO\leqslant\frac{1}{2}\leqslant\tan\angle PAB$， ……………………………(16分)

且$\angle PAO\in\left[0，\frac{\pi}{2}\right)$，所以$\angle PAB\geqslant PAO$. ……………………………(17分)

19.（本小题满分 17 分）

证明：（1）取 $m=1$，则 $(n-1)S_{n+1}=(n+1)(S_n-S_1)$，即 $2S_n=(n-1)a_{n+1}+(n+1)a_1$，递推，

当 $n\geqslant 2$ 时，$2S_{n-1}=(n-2)a_n+na_1$，两式相减整理得：$na_n=(n-1)a_{n+1}+a_1,(n\geqslant 2)$，又：

$(n-1)a_{n-1}=(n-2)a_n+a_1,(n\geqslant 3)$，两式相减整理可得：$a_{n-1}+a_{n+1}=2a_n,(n\geqslant 3)$，由

$2S_n=(n-1)a_{n+1}+(n+1)a_1$，当 $n=2$ 时，$2S_2=a_3+3a_1$，即$2a_2=a_3+a_1$，

所以对任意的$n\geqslant 2$，$n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_{n-1}+a_{n+1}=2a_n$，

所以$\{a_n\}$是等差数列，由 $a_{1012}=2024$，可得：

$$a_1+1011d=2024\Rightarrow d=\frac{2024-a_1}{1011}\in\mathbf{N}^*\Rightarrow\begin{cases}d=1\\a_1=1013\end{cases}\text{或}\begin{cases}d=2\\a_1=2\end{cases}.$$

$\therefore a_n=n+1012$ 或 $a_n=2n$，$n\in\mathbf{N}^*$. ……………………………………………………（8 分）

（2）由于 $d>1$，$\therefore a_n=2n$，设“$G-$数列”的公比为q，且 $q>1$.

①由题意，只需证存在q对$k\leqslant 5$且$k\in\mathbf{N}^*$，$2q^{k-1}\leqslant 2k\leqslant 2q^k$ 成立，

即 $(k-1)\ln q\leqslant\ln k\leqslant k\ln q$ 成立，设 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，$x>0\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，

令 $f'(x)>0\Rightarrow 0<x<\mathrm{e}$，所以 $f(x)$ 在 $(0，\mathrm{e})$ 上单增，$(\mathrm{e}，+\infty)$ 上单减，

又$\because\dfrac{\ln 2}{2}<\dfrac{\ln 3}{3}$，$\therefore f(x)=\dfrac{\ln x}{x}\leqslant\dfrac{\ln 3}{3}$，

所以 $q=\sqrt[3]{3}$，使得 $\ln k\leqslant k\ln q$ 对任意 $k\leqslant 5$且$k\in\mathbf{N}^*$成立. ……………………（12 分）

经检验，对任意 $k\leqslant 5$且$k\in\mathbf{N}^*$，$(\sqrt[3]{3})^{k-1}\leqslant k$ 均成立，

所以对任意 $k\leqslant 5$且$k\in\mathbf{N}^*$，存在“$G-$数列”$\{b_n\}$，使得 $b_k\leqslant a_k\leqslant b_{k+1}$ 成立；

……………………………………………………………………（14 分）

②由①知，若 $c_t\leqslant a_t\leqslant c_{t+1}$ 成立，则 $q^{t-1}\leqslant t\leqslant q^t$ 成立，当 $k\geqslant 6$ 时，取 $t=3\Rightarrow q^2\leqslant 3\leqslant q^3$，

取 $t=6\Rightarrow q^5\leqslant 6\leqslant q^6$，由$\begin{cases}q^3\geqslant 3\\q^5\leqslant 6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}q^{15}\geqslant 243\\q^{15}\leqslant 216\end{cases}\Rightarrow q$不存在，

所以当 $k\geqslant 6$且$k\in\mathbf{N}^*$时，不存在“$G-$数列”$\{c_n\}$，使得 $c_t\leqslant a_t\leqslant c_{t+1}$ 对任意正整数 $t\leqslant k$

成立. …………………………………………………………（17 分）