

数学试卷

注意事项:

1. 答题前, 考生务必用黑色碳素笔将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号在答题卡上填写清楚.
2. 每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑, 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号. 在试题卷上作答无效.
3. 考试结束后, 请将本试卷和答题卡一并交回. 满分 150 分, 考试用时 120 分钟.

一、单项选择题 (本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的)

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - x - 6 \leq 0\}$, $B = \{x | y = \sqrt{x-2}\}$, 则 $(\complement_{\mathbb{R}} B) \cap A =$
 A. $[-2, 2]$ B. $[-2, 2)$ C. $[-2, 3]$ D. $[-2, 3)$
2. 已知 $a > 0$, $b > 0$, 且 $a + b = 2$, 则一定正确的是
 A. $a^2 + b^2 \leq 2$ B. $2^{a-b} \leq \frac{1}{4}$
 C. $\log_2 a + \log_2 b \leq 0$ D. $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq 2$
3. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $A = \frac{\pi}{3}$, $C = \frac{5\pi}{12}$, $b = \sqrt{2}$, 则 $c =$
 A. $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$ C. $\sqrt{3} - 1$ D. $\sqrt{3} + 1$
4. 已知 m, n 是两条不同的直线, α, β, γ 是三个不同的平面, 则下列结论正确的是
 A. 若 $m \parallel n$, $m \parallel \alpha$, 则 $n \parallel \alpha$
 B. 若 $\alpha \cap \beta = m$, $n \subset \alpha$, $n \perp m$, 则 $\alpha \perp \beta$
 C. 若 $\alpha \perp \gamma$, $\beta \perp \gamma$, 则 $\alpha \parallel \beta$
 D. 若 $m \parallel n$, $\alpha \parallel \beta$, $m \perp \alpha$, 则 $n \perp \beta$
5. 设 $1 < a < 2$, 则随机变量 X 的分布列是:

X	1	a	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

则当 a 在 $(1, 2)$ 内增大时

- A. $D(X)$ 增大
- B. $D(X)$ 减小
- C. $D(X)$ 先增大后减小
- D. $D(X)$ 先减小后增大

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = \frac{1}{1-a_n}$, $a_1 = \frac{2024}{2025}$, 记 $T_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n$, 则 $T_{2024} =$

- A. $-\frac{1}{2025}$ B. $\frac{1}{2024}$ C. 2024 D. -2025

7. 已知圆 $C: x^2 - 2x + y^2 = 0$ 与直线 $l: y = mx + 2m (m > 0)$, 过 l 上任意一点 P 向圆 C 引切线, 切点为 A 和 B , 若线段 AB 长度的最小值为 $\sqrt{3}$, 则实数 m 的值为

- A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{\sqrt{14}}{7}$ D. $\frac{\sqrt{14}}{2}$

8. 已知 $f(x) = \frac{|\sin \omega x - \cos \omega x| + \sin \omega x + \cos \omega x}{2} (\omega > 0)$, 若函数 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$ 上单调递增, 则实数 ω 的取值范围是

- A. $(0, \frac{3}{2}] \cup \{1\}$ B. $(0, \frac{3}{2}) \cup \{1\}$
C. $[1, \frac{3}{2}] \cup [5, 6]$ D. $(1, \frac{3}{2}) \cup (5, 6)$

二、多项选择题 (本大题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项是符合题目要求的. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分)

9. 在复平面内, 下列说法正确的是

- A. 复数 $z = 1 - 2i$, 则 z 在复平面内对应的点位于第一象限
B. 若复数 z_1, z_2 满足 $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$, 则 $z_1 z_2 = 0$
C. 若 $|z| = 1, z \in \mathbf{C}$, 则 $|z - 2|$ 的最小值为 1
D. 若 $-4 + 3i$ 是关于 x 的方程 $x^2 + px + q = 0 (p, q \in \mathbf{R})$ 的根, 则 $p = 8$

10. 在棱长为 2 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 E, F 分别为棱 AB, AD 的中点, 点 G 在底面 $A_1B_1C_1D_1$ 内运动 (含边界), 且 $A_1C \perp$ 平面 EFG , 则下列结论正确的是

- A. 存在点 G 使得 $EG \parallel$ 平面 ADD_1A_1
B. 平面 EFG 截正方体所得截面的面积为 $6\sqrt{3}$
C. 若 $\overrightarrow{A_1G} = \lambda \overrightarrow{GC_1} (\lambda \in \mathbf{R})$, 则 $\lambda = 3$
D. 直线 CE 与平面 EFG 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$

11. 已知函数 $f(x) = x^4 + ax^2 + ax + 1 (a \neq 0)$, 则下列结论正确的是

- A. 存在实数 a 使得 $f(x)$ 恰有两个极值点
B. 若 $f(x)$ 恰有三个极值点, 则 $a < -\frac{27}{8}$
C. 对任意的 $a \in \mathbf{R}$ 且 $a \neq 0$, 总存在实数 x 使得 $f(x) < 1$
D. 存在实数 a , 使得 $f(x)$ 的图象没有对称轴

三、填空题 (本大题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分)

12. 已知 $f(x) = e^x - e^{-x}$, 若 $f(x^2 - 2x) > f(6 - x)$, 则实数 x 的取值范围为_____.
13. 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 满足 $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{BD}$, P 为线段 AD 的中点, 过点 P 作一条直线与边 AB 、 AC 分别交于点 M 、 N 两点. 设 $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = y\overrightarrow{AC}$ ($x > 0, y > 0$), 当 $\triangle AMN$ 与 $\triangle ABC$ 的面积比为 $1:2$ 时, 则 $2y+x$ 的值为_____.
14. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_2 的直线 l 交双曲线的右支于 A, B 两点, 点 E 满足 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF_1} = 2\overrightarrow{AE}$, 且 $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EF_1}$, 若 $\cos \angle F_1AF_2 = \frac{7}{9}$, 则该双曲线的离心率是_____.

四、解答题 (共 77 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

15. (本小题满分 13 分)

已知函数 $f(x) = e^x - ax - 1$.

- (1) 试讨论函数 $f(x)$ 的单调性;
- (2) 若直线 $y = 2x$ 与 $y = f(x)$ 相切, 求实数 a 的值.

16. (本小题满分 15 分)

在整数 $1, 2, \dots, n$ 中任取三个不同的数, 并构造三条线段的长度恰好为这三个数.

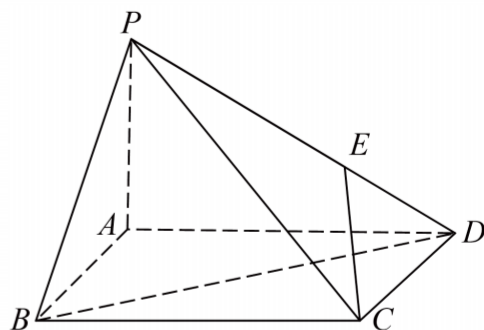
- (1) 当 $n = 6$ 时, 求这三条线段能构成的不同三角形个数;
- (2) 当 $n = 20$ 时, 求这三条线段能构成最大边长为 20 的三角形的概率.

17. (本小题满分 15 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 四边形 $ABCD$ 为平行四边形, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $|\vec{AB} + \vec{AD}| = |\vec{AB} - \vec{AD}|$, 且 $AB=3$, $AD=3\sqrt{3}$, $\vec{PE}=2\vec{ED}$, 连接 CE .

(1) 求证: $CE \perp BD$;

(2) 当 CE 与平面 BPC 所成角的正切值为 $\frac{1}{2}$ 时, 求棱 AP 的长.



18. (本小题满分 17 分)

设 $A(-8, 0)$, $B(-2, 8)$, $O(0, 0)$, 点 P 是抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 上的动点, 点 P 到抛物线 C 的准线的距离最小值为 2.

(1) 求 $|PB|$ 的最小值;

(2) 求 $\tan \angle PAB$ 的取值范围;

(3) 证明: $\angle PAB \geq \angle PAO$.

19. (本小题满分 17 分)

已知递增数列 $\{a_n\}$ 的各项为正整数, 前 n 项和为 S_n , 数列 $\{a_n\}$ 满足“对任意的 $m, n \in \mathbf{N}^*$, 均有 $(n-m)S_{n+m} = (n+m)(S_n - S_m)$ 成立. 且 $a_{1012} = 2024$.

(1) 证明: 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 并求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $\{a_n\}$ 的公差大于 1, 定义首项为 2 且公比大于 1 的等比数列为“ G -数列”, 证明:

①对任意 $k \leq 5$ 且 $k \in \mathbf{N}^*$, 存在“ G -数列” $\{b_n\}$, 使得 $b_k \leq a_k \leq b_{k+1}$ 成立;

②当 $k \geq 6$ 且 $k \in \mathbf{N}^*$ 时, 不存在“ G -数列” $\{c_n\}$, 使得 $c_t \leq a_t \leq c_{t+1}$ 对任意正整数 $t \leq k$ 成立.