

2024 年普通高等学校招生全国统一考试

全国甲卷理科数学

使用范围：陕西、宁夏、青海、内蒙古、四川

注意事项：

1. 答题前，务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上.
2. 答选择题时，必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 如需改动，用橡皮擦擦干净后，再选涂其它答案标号.
3. 答非选择题时，必须使用 0.5 毫米黑色签字笔，将答案书写在答题卡规定的位置上.
4. 所有题目必须在答题卡上作答，在试题卷上答题无效.
5. 考试结束后，只将答题卡交回.

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设 $z=5+i$ ，则 $i(\bar{z}+z)=(\quad)$

- (A) $10i$ (B) $2i$ (C) 10 (D) -2

【参考答案】 A

【详细解析】 因为 $z=5+i$ ，所以 $i(\bar{z}+z)=10i$ ，故选(A).

2. 集合 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$ ， $B=\{x|\sqrt{x}\in A\}$ ，则 $\complement_A(A\cap B)=(\quad)$

- (A) $\{1, 4, 9\}$ (B) $\{3, 4, 9\}$ (C) $\{1, 2, 3\}$ (D) $\{2, 3, 5\}$

【参考答案】 D

【详细解析】 因为 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$ ， $B=\{x|\sqrt{x}\in A\}=\{1, 4, 9, 16, 25, 81\}$ ，所以 $\complement_A(A\cap B)=\{2, 3, 5\}$ ，故选(D).

3. 若实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 4x-3y-3\geq 0, \\ x-2y-2\leq 0, \\ 2x+6y-9\leq 0, \end{cases}$ 则 $z=x-5y$ 的最小值为 $(\quad)$

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) 0 (C) $-\frac{5}{2}$ (D) $-\frac{7}{2}$

【参考答案】 D

【详细解析】 将约束条件两两联立可得 3 个交点： $(0, -1)$ 、 $(\frac{3}{2}, 1)$ 和 $(3, \frac{1}{2})$ ，经检验都符合约束条件. 代入目标函数可得： $z_{\min}=-\frac{7}{2}$ ，故选(D).

4. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $S_5=S_{10}$ ， $a_5=1$ ，则 $a_1=(\quad)$

- (A) -2 (B) $\frac{7}{3}$ (C) 1 (D) 2

【参考答案】 B

【详细解析】 因为 $S_5=S_{10}$ ，所以 $S_7=S_{18}$ ， $a_8=0$ ，又因为 $a_5=1$ ，所以公差 $d=-\frac{1}{3}$ ， $a_1=a_8-7d=\frac{7}{3}$ ，故选(B).

5. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1(0,$

(A) $\frac{13}{5}$

(B) $\frac{13}{7}$

(C) 2

(D) 3

【参考答案】C

【详细解析】 $e = \frac{c}{a} = \frac{|F_1F_2|}{|PF_2| - |PF_1|} = 2$, 故选(C).

6. 曲线 $f(x) = x^6 + 3x$ 在 $(0, -1)$ 处的切线与坐标轴围成的面积为()

(A) $\frac{1}{6}$

(B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【参考答案】A

【详细解析】因为 $y' = 6x^5 + 3$, 所以 $k = 3$, $y = 3x - 1$, $S = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{6}$, 故选(A).

7. 函数 $f(x) = -x^2 + (e^x - e^{-x})\sin x$ 的大致图像为()

【参考答案】B

【详细解析】选(B).

8. 已知 $\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \sqrt{3}$, 则 $\tan(\alpha + \frac{\pi}{4}) = ()$

(A) 3

(B) $2\sqrt{3} - 1$

(C) -3

(D) $\frac{1}{3}$

【参考答案】B

【详细解析】因为 $\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \sqrt{3}$, 所以 $\tan \alpha = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\tan(\alpha + \frac{\pi}{4}) = \frac{\tan \alpha + 1}{1 - \tan \alpha} = 2\sqrt{3} - 1$, 故选(B).

9. 已知向量 $a = (x + 1, x)$, $b = (x, 2)$, 则()

(A) “ $a \perp b$ ”的必要条件是 “ $x = -3$ ”

(B) “ $a \parallel b$ ”的必要条件是 “ $x = -3$ ”

(C) “ $a \perp b$ ”的充分条件是 “ $x = 0$ ”

(D) “ $a \parallel b$ ”的充分条件是 “ $x = 0$ ”

【参考答案】C

【详细解析】 $a \perp b$, 则 $x(x + 1) + 2x = 0$, 解得: $x = 0$ 或 -3 , 故选(C).

10. 已知已知 m 、 n 是两条不同的直线, α 、 β 是两个不同的平面: ①

若 $m \perp \alpha$, $n \perp \alpha$, 则 $m \parallel n$; ②若 $\alpha \cap \beta = m$, $m \parallel n$, 则 $n \parallel \beta$; ③若 $m \parallel \alpha$, $n \parallel \alpha$, m 与 n 可能异面, 也可能相交, 也可能平行; ④若 $\alpha \cap \beta = m$, n 与 α 和 β 所成的角相等, 则 $m \perp n$, 以上命题是真命题的是()

(A) ①③

(B) ②③

(C) ①②③

(D) ①③④

【参考答案】A

【详细解析】选(A).

11. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A , B , C 所对边分别为 a , b , c , 若 $B = \frac{\pi}{3}$,

$b^2 = \frac{9}{4}ac$, 则 $\sin A + \sin C = ()$

(A) $\frac{2\sqrt{39}}{13}$

(B) $\frac{\sqrt{39}}{13}$

(C) $\frac{\sqrt{7}}{2}$

(D) $\frac{3\sqrt{13}}{13}$

【参考答案】C

【详细解析】因为 $B = \frac{\pi}{3}$, $b^2 = \frac{9}{4}ac$, 所以 $\sin A \sin C = \frac{4}{9} \sin^2 B = \frac{1}{3}$. 由余弦定理可得: $b^2 = a^2 + c^2$

$$-ac = \frac{9}{4}ac, \text{ 即: } a^2 + c^2 = \frac{13}{4}ac, \sin^2 A + \sin^2 C = \frac{13}{4}\sin A \sin C = \frac{13}{12}, \text{ 所以 } (\sin A + \sin C)^2 = \sin^2 A + \sin^2 C + 2\sin A \sin C = \frac{7}{4}, \sin A + \sin C = \frac{\sqrt{7}}{2}, \text{ 故选(C).}$$

12. 已知 a, b, c 成等差数列, 直线 $ax + by + c = 0$ 与圆 $C: x^2 + (y + 2)^2 = 5$ 交于 A, B 两点, 则 $|AB|$ 的最小值为()

- (A)2 (B)3 (C)4 (D)6

【参考答案】C

【详细解析】因为 a, b, c 成等差数列, 所以 $a - 2b + c = 0$, 直线 $ax + by + c = 0$ 恒过 $P(1, -2)$, 当 $PC \perp AB$ 时, $|AB|$ 取得最小值, 此时 $|PC| = 1, |AB| = 2\sqrt{5 - |PC|^2} = 4$, 故选(C).

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 二项式 $(\frac{1}{3} + x)^{10}$ 的展开式中系数的最大值是_____.

【参考答案】5

【详细解析】展开式中系数最大的项一定在下面的 5 项: $C_{10}^5(\frac{1}{3})^5, C_{10}^6(\frac{1}{3})^4, C_{10}^7(\frac{1}{3})^3, C_{10}^8(\frac{1}{3})^2, C_{10}^9(\frac{1}{3})^1$, 计算可得: 系数的最大值为 $C_{10}^8(\frac{1}{3})^2 = 5$.

14. 甲、乙两个圆台上下底面的半径均为 r_2 和 r_1 , 母线长分别为 $2(r_1 - r_2)$ 和 $3(r_1 - r_2)$, 则两个圆台的体积之比 $\frac{V_{\text{甲}}}{V_{\text{乙}}} =$ _____.

【参考答案】 $\frac{\sqrt{6}}{4}$

【详细解析】 $\frac{V_{\text{甲}}}{V_{\text{乙}}} = \frac{h_{\text{甲}}}{h_{\text{乙}}} = \frac{\sqrt{3}(r_1 - r_2)}{2\sqrt{2}(r_1 - r_2)} = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

15. 已知 $a > 1, \frac{1}{\log_8 a} - \frac{1}{\log_a 4} = -\frac{5}{2}$, 则 $a =$ _____.

【参考答案】64

【详细解析】因为 $\frac{1}{\log_8 a} - \frac{1}{\log_a 4} = \frac{3}{\log_2 a} - \frac{1}{2}\log_2 a = -\frac{5}{2}$, 所以 $(\log_2 a + 1)(\log_2 a - 6) = 0$, 而 $a > 1$, 故 $\log_2 a = 6, a = 64$.

16. 编号为 1、2、3、4、5、6 的六个小球, 不放回的抽取三次, 记

m 表示前两个球号码的平均数, 记 n 表示前三个球号码的平均数, 则 m 与 n 差的绝对值不超过 0.5 的概率是_____.

【参考答案】 $\frac{7}{15}$

【详细解析】记前三个球的号码分别为 a, b, c , 则共有 $A_6^3 = 120$ 种可能. 令 $|m - n| = |\frac{a+b}{2} - \frac{a+b+c}{3}| = |\frac{a+b-2c}{6}| \leq 0.5$ 可得: $|a+b-2c| \leq 3$, 根据对称性: $c = 1$ 或 6 时, 均有 2 种可能; $c = 2$ 或 5 时, 均有 10 种可能; $c = 3$ 或 4 时, 均有 16 种可能; 故满足条件的共有 56 种可能, $P = \frac{56}{120} = \frac{7}{15}$.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤. 第 17 题~第 21 题为必考题, 每个考题考生必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一)必考题：共 60 分.

17. (12 分)题干略.

【参考答案】见解析.

【详细解析】(1) $\chi^2 = \frac{150(70 \times 24 - 26 \times 30)^2}{96 \times 54 \times 50 \times 100} < 6.635$, 没有 99% 的把握;

(2) $\bar{p} > p + 1.65 \sqrt{\frac{p(1-p)}{150}}$, 故有优化提升.

18. (12 分)已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $4S_n = 3a_n + 4$.

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)设 $b_n = (-1)^{n-1}na_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n .

【参考答案】见解析.

【详细解析】(1)因为 $4S_n = 3a_n + 4$, 所以 $4S_{n+1} = 3a_{n+1} + 4$, 两式相减可得: $4a_{n+1} = 3a_{n+1} - 3a_n$, 即: $a_{n+1} = -3a_n$, 又因为 $4S_1 = 3a_1 + 4$, 所以 $a_1 = 4$, 故数列 $\{a_n\}$ 是首项为 4, 公比为 -3 的等比数列, $a_n = 4 \cdot (-3)^{n-1}$;

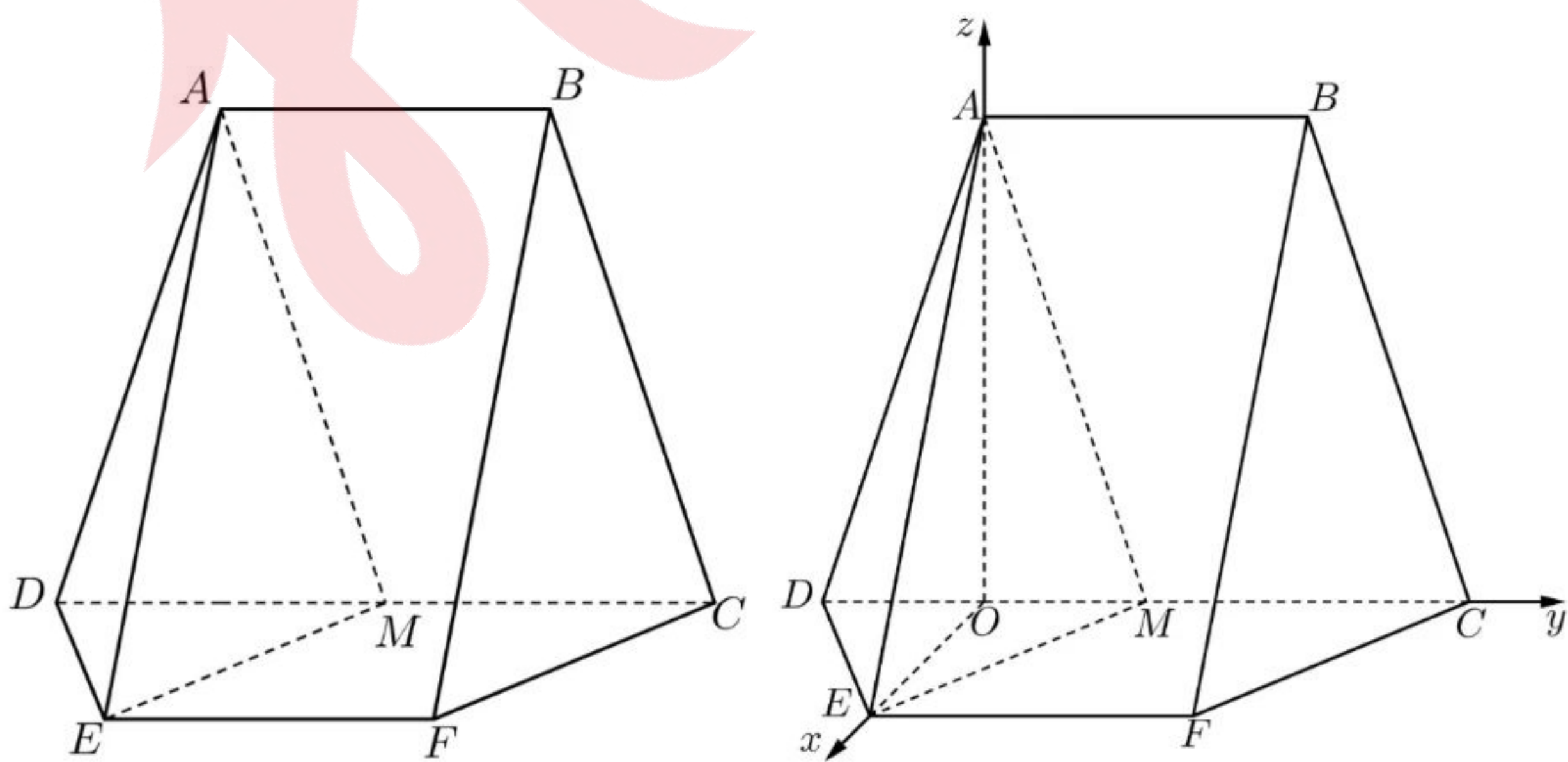
(2) $b_n = (-1)^{n-1}na_n = 4n \cdot 3^{n-1}$, 所以 $T_n = 4(1 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 + 3 \cdot 3^2 + \cdots + n \cdot 3^{n-1})$, $3T_n = 4(1 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + \cdots + n \cdot 3^n)$, 两式相减可得: $-2T_n = 4(1 + 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1} - n \cdot 3^n) = 4(\frac{1-3^n}{1-3} - n \cdot 3^n) = (2 - 4n)3^n - 2$, $T_n = (2n-1)3^n + 1$.

解法 2: $b_n = (-1)^{n-1}na_n = 4n \cdot 3^{n-1}$, 所以 $T_n = T_{n-1} + 4n \cdot 3^{n-1}$, 两边同时减去 $(2n-1)3^n$ 可得: $T_n - (2n-1)3^n = T_{n-1} - (2n-3)3^{n-1}$, 故 $\{T_n - (2n-1)3^n\}$ 为常数列, 即: $T_n - (2n-1)3^n = 1$, $T_n = (2n-1)3^n + 1$.

19. (12 分)如图, 已知 $AB \parallel CD$, $CD \parallel EF$, $AB = DE = EF = CF = 2$, $CD = 4$, $AD = BC = \sqrt{10}$, $AE = 2\sqrt{3}$, M 为 CD 的中点.

(1)证明: $EM \parallel$ 平面 BCF ;

(2)求二面角 $A-EM-B$ 的正弦值.



【参考答案】见解析

【详细解析】(1)由题意: $EF \parallel CM$, $EF = CM$, 而 $CF \not\subset$ 平面 ADO , $EM \not\subset$ 平面 ADO , 所以 $EM \parallel$ 平面 BCF ;

(2)取 DM 的中点 O , 连结 OA , OE , 则 $OA \perp DM$, $OE \perp DM$, $OA = 3$, $OE = \sqrt{3}$, 而 $AE = 2\sqrt{3}$, 故 $OA \perp OE$. 以 O 为坐标原点建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $A(0, 0, 3)$, $E(\sqrt{3}, 0,$

0), $M(0, 1, 0)$, $B(0, 2, 3)$, $\overrightarrow{AE}=(\sqrt{3}, 0, -3)$, $\overrightarrow{EM}=(-\sqrt{3}, 1, 0)$, $\overrightarrow{MB}=(0, 1, 3)$,

设平面 AEM 的法向量为 $\vec{n}=(x, y, z)$, 由 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AE}=0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{EM}=0 \end{cases}$ 可得: $\begin{cases} \sqrt{3}x-3z=0 \\ -\sqrt{3}x+y=0 \end{cases}$, 令 $z=1$, 则 $\vec{n}=(\sqrt{3},$

$3, 1)$, 同理: 取平面 BEM 的法向量为 $\vec{m}=(\sqrt{3}, 3, -1)$, 则 $\cos<\vec{m}, \vec{n}>=\frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\frac{11}{13}$, $\sin<\vec{m},$

$\vec{n}>=\frac{4\sqrt{3}}{13}$, 故二面角 $A-EM-B$ 的正弦值为 $\frac{4\sqrt{3}}{13}$.

20. (12 分)已知函数 $f(x)=(1-ax)\ln(1+x)-x$.

(1)当 $a=-2$ 时, 求 $f(x)$ 的极值;

(2)当 $x\geqslant 0$ 时, $f(x)\geqslant 0$, 求 a 的取值范围.

【参考答案】见解析

【详细解析】(1)当 $a=-2$ 时, $f(x)=(1+2x)\ln(1+x)-x$, $x>-1$. $f'(x)=2\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}$, 当 $x>0$ 时, $f'(x)>0$, 当 $-1<x<0$ 时, $f'(x)<0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上递减, 在 $(0, +\infty)$ 上递增, 故 $f(x)$ 的极小值为 $f(0)=0$, 无极大值;

(2) $f(x)=(1-ax)\ln(1+x)-x$, $f'(x)=-a\ln(1+x)-\frac{(a+1)x}{1+x}$. 令 $g(x)=f'(x)$, 则 $g'(x)=-\frac{a}{1+x}-\frac{a+1}{(1+x)^2}$. 因为当 $x\geqslant 0$ 时, $f(x)\geqslant 0$, 且 $f(0)=0$, $f'(0)=0$, 所以 $g'(0)=-1-2a\geqslant 0$, $a\leqslant -\frac{1}{2}$. 当 $a\leqslant -\frac{1}{2}$ 时, $g'(x)\geqslant \frac{1}{2(1+x)}-\frac{1}{2(1+x)^2}=\frac{x}{2(1+x)^2}\geqslant 0$, $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上递增, $g(x)=f'(x)\geqslant g(0)=0$, 故 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上递增, $f(x)\geqslant f(0)=0$ 恒成立, 即 a 的取值范围为 $(-\infty, -\frac{1}{2}]$.

21. (12 分)已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 F , 点 $M(1, \frac{3}{2})$ 在椭圆 C 上, 且 $MF\perp x$ 轴.

(1)求椭圆 C 的方程;

(2) $P(4, 0)$, 过 P 的直线与椭圆 C 交于 A, B 两点, N 为 FP 的中点, 直线 NB 与 MF 交于 Q , 证明: $AQ\perp y$ 轴.

【参考答案】见解析

【详细解析】(1)设椭圆 C 的左焦点为 F_1 , 则 $|F_1F|=2$, $|MF|=\frac{3}{2}$. 因为 $MF\perp x$ 轴, 所以 $|MF_1|=\frac{5}{2}$, $2a=|MF_1|+|MF|=4$, 解得: $a^2=4$, $b^2=a^2-1=3$, 故椭圆 C 的方程为: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$;

(2)解法 1: 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$, 则 $\begin{cases} x_1+\lambda x_2=4 \\ 1+\lambda \\ y_1+\lambda y_2=0 \\ 1+\lambda \end{cases}$, 即 $\begin{cases} \lambda x_2=4+4\lambda-x_1 \\ \lambda y_2=-y_1 \end{cases}$. 又由