

高三数学(理科)试题参考答案及评分标准

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.

1. B 2. C 3. A 4. D 5. B 6. B 7. A 8. C 9. D 10. C 11. D 12. C

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 81860 14. $\frac{4}{3}$ 15. $\frac{380\sqrt{2}}{3}$ 16. 35

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(一)必考题：共 60 分.

17. (12 分)

解析：(1)由题意 $\hat{b} = \frac{165.2 - 7 \times 4 \times 4.5}{140 - 7 \times 4^2} = 1.4$, 2 分

$\hat{a} = 4.5 - 1.4 \times 4 = -1.1$, 4 分

则 $y = 1.4x - 1.1$ 6 分

(2)由题意可得 $1.4x - 1.1 > 12 \Rightarrow x > \frac{131}{14}$, 9 分

因为 $9 < \frac{131}{14} < 10$, 11 分

则第 10 个月能被评选为“优秀管理团队”. 12 分

18. (12 分)

解析：(1)连接 D_1A, FA , 因为 E, F 分别是 CC_1, BC 的中点,

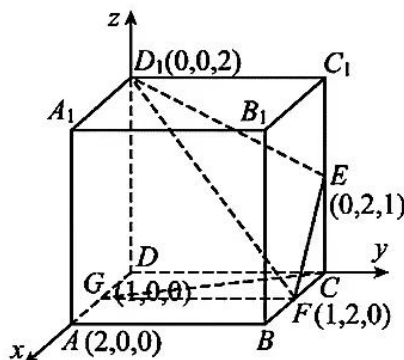
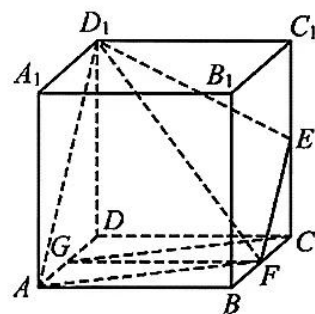
所以 $EF \parallel D_1A$, 所以 A, F, E, D_1 四点共面. 2 分

由于 G 分别是 AD 的中点, 则 $AG \parallel FC$ 且 $AG = FC$, 3 分

那么四边形 $AGCF$ 为平行四边形, 从而 $CG \parallel AF$ 5 分

又 $CG \not\subset$ 面 $D_1EF, AF \subset$ 面 D_1EF , 故 $CG \parallel$ 面 D_1EF 6 分

(2)以 $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DD_1}$ 分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $A(2,0,0), F(1,2,0), E(0,2,1), D_1(0,0,2), G(1,0,0), \overrightarrow{GD_1}=(-1,0,2), \overrightarrow{GF}=(0,2,0),$
 $\overrightarrow{ED_1}=(0,-2,1), \overrightarrow{EF}=(1,0,-1),$

设平面 GD_1F 的法向量为 $m=(x_1, y_1, z_1)$, 则 $\begin{cases} m \cdot \overrightarrow{GD_1}=0 \\ m \cdot \overrightarrow{GF}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x_1+2z_1=0 \\ 2y_1=0 \end{cases},$

故 $m=(2,0,1)$ 8 分

设平面 ED_1F 的法向量为 $n=(x_2, y_2, z_2)$, 则 $\begin{cases} n \cdot \overrightarrow{ED_1}=0 \\ n \cdot \overrightarrow{EF}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2y_2+z_2=0 \\ x_2-z_2=0 \end{cases}$

故 $n=(2,1,2)$ 10 分

而 $\cos \langle m, n \rangle = \frac{m \cdot n}{|m||n|} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 11 分

那么二面角 $G-D_1F-E$ 的平面角的正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 12 分

19. (12 分)

解析: (1) 因为 $\frac{1+\sin 2B+\cos 2B}{\sin 2B+2\sin^2 B} = \frac{2\sin B\cos B+2\cos^2 B}{2\sin B\cos B+2\sin^2 B} = \frac{\cos B}{\sin B} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 4 分

因为 $B \in (0, \pi)$, 5 分

所以 $B = \frac{\pi}{3}$ 6 分

(2) 因为 $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DC}$, 所以 $\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$, 7 分

平方可得: $9|\overrightarrow{BD}|^2 = |\overrightarrow{BA}|^2 + 4|\overrightarrow{BC}|^2 + 4\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$,

代入得: $36 = 4a^2 + c^2 + 2ac = (2a+c)^2 - 2ac$ 9 分

又因为 $2ac \leq \left(\frac{2a+c}{2}\right)^2$, 所以 $36 = (2a+c)^2 - 2ac \geq (2a+c)^2 - \frac{(2a+c)^2}{4}$.

所以 $2a+c \leq 4\sqrt{3}$ 11 分

即 $2a+c$ 的最大值 $4\sqrt{3}$, 当且仅当 $a=\sqrt{3}, c=2\sqrt{3}$ 时等号成立. 12 分

20. (12 分)

解析: (1) 由题意有 $\begin{cases} a - \frac{a^2}{c} = \sqrt{3} - 1 \\ a + c = 3 + \sqrt{3} \end{cases}$, 2 分

解得 $a=\sqrt{3}, c=3$, 从而 $b^2=6$ 3 分

所以双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = 1$ 4 分

(2) 当直线 MN 斜率不为 0 时, 设直线 $MN: x=my+3$,

由 $\begin{cases} x=my+3 \\ \frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{6}=1 \end{cases}$ 可得: $(2m^2-1)y^2+12my+12=0$ 5 分

因为过 F_2 的直线与 C 交于 M, N 两点, 则 $\begin{cases} 2m^2-1 \neq 0 \\ \Delta=144m^2-48(2m^2-1) > 0 \end{cases} \Rightarrow 2m^2 \neq 1$ 6 分

设 $M(my_1+3, y_1), N(my_2+3, y_2)$, 则 $y_1+y_2=\frac{-12m}{2m^2-1}, y_1y_2=\frac{12}{2m^2-1}$ 7 分

直线 $MF_1: y=\frac{y_1}{my_1+6}(x+3)$ 交 l 于点 Q , 则 $Q\left(1, \frac{4y_1}{my_1+6}\right)$ 8 分

由对称性可知定点必然在 x 轴上.

设直线 QN 交 x 轴于点 $H(x, 0)$, 由于 Q, N, H 三点共线, 则 $\overrightarrow{HQ} \parallel \overrightarrow{NQ}$,

$\overrightarrow{HQ} = \left(1-x, \frac{4y_1}{my_1+6}\right), \overrightarrow{NQ} = \left(-my_2-2, \frac{4y_1-my_1y_2-6y_2}{my_1+6}\right)$, 9 分

那么 $\frac{4y_1}{my_1+6}(-my_1-2) = \frac{4y_1-my_1y_2-6y_2}{my_1+6}(1-x)$,

故 $x = \frac{12y_1+3my_1y_2-6y_2}{4y_1-my_1y_2-6y_2} = \frac{12y_1+\frac{36m}{2m^2-1}-6\left(\frac{-12m}{2m^2-1}-y_1\right)}{4y_1-\frac{12m}{2m^2-1}-6\left(\frac{-12m}{2m^2-1}-y_1\right)} = \frac{9}{5}$,

当直线 MN 斜率为 0 时, 直线 QN 所在直线为 x 轴, 必过定点 $\left(\frac{9}{5}, 0\right)$, 11 分

即直线 QN 过定点 $\left(\frac{9}{5}, 0\right)$ 12 分

21. (12 分)

解析: (1) $h(x) = \ln(x+1) - e^x + 1, h'(x) = \frac{1}{x+1} - e^x$, 1 分

$h'(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递减, 而 $h'(0) = 0$, 2 分

当 $x \in (-1, 0)$ 时, $h'(x) > h'(0) = 0$; 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $h'(x) < h'(0) = 0$.

则 $h(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上单调递增, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 3 分

故 $h(x)$ 的极大值点为 $x=0$ 4 分

(2) $m(x) = (e^x + 1) \cdot [\ln(x+1) - \ln(-x+1)] - a(e^x - 1) = (e^x + 1) \cdot$

$\left[\ln\left(\frac{x+1}{-x+1}\right) - \frac{a(e^x-1)}{e^x+1}\right]$ 的零点等价于函数 $m(x) = \ln\left(\frac{x+1}{-x+1}\right) - \frac{a(e^x-1)}{e^x+1}$ 的零点, 我们

只需研究 $m(x)$. 易知 $m(x)$ 为奇函数, $m(0) = 0$, 我们只需研究 $m(x)$ 在 $(0, 1)$ 上的零点.

..... 5 分

$m'(x) = \frac{2}{1-x^2} - \frac{2ac^x}{(e^x+1)^2} = 2 \frac{e^{2x}+2e^x+1-ac^x+ax^2e^x}{(1-x^2)(e^x+1)^2}$, 6 分

① 当 $a \leq 0$ 时, $m'(x) > 0$, $m(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 则在 $(0, 1)$ 上无零点, 从而 $m(x)$ 在定义域

上只有一个零点 $x=0$ 7 分

②当 $0 < a \leq 3$ 时, $e^{2x} + 2e^x - ae^x = e^x(e^x + 2 - a) > 0 (0 < x < 1)$, 则 $m'(x) > 0$, $m(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 则在 $(0, 1)$ 上无零点, 从而 $m(x)$ 在定义域上只有一个零点 $x=0$ 8 分

当 $a > 3$ 时, 设 $w(x) = e^{2x} + 2e^x + 1 - ae^x + ax^2e^x$,

$w'(x) = 2e^{2x} + 2e^x - ae^x + 2axe^x + ax^2e^x = e^x(2e^x + 2 - a + 2ax + ax^2)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增.

③当 $3 < a \leq 4$ 时, $w'(x) > w'(0) = 4 - a \geq 0 (0 < x < 1)$, 则 $w(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, $w(x) > w(0) = 4 - a \geq 0 (0 < x < 1)$, 即 $m'(x) > 0$, $m(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 则在 $(0, 1)$ 上无零点, 从而 $m(x)$ 在定义域上只有一个零点 $x=0$ 9 分

④当 $a > 4$ 时, $w'(0) = 4 - a < 0$, $w'(1) = e(2e + 2 + 2a) > 0$, 由零点存在定理和 $w'(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 存在唯一 $x_0 \in (0, 1)$ 使得 $w'(x_0) = 0$. 当 $x \in (0, x_0)$ 时, $w'(x) < 0$; 当 $x \in (x_0, 1)$ 时, $w'(x) > 0$. 那么 $w(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, 1)$ 上单调递增. 而 $w(0) = 4 - a < 0$, $w(1) = e^2 + 2e + 1 > 0$, 则存在唯一 $x_1 \in (0, 1)$ 使得 $w(x_1) = 0$. 当 $x \in (0, x_1)$ 时, $w(x) < 0$; 当 $x \in (x_1, 1)$ 时, $w(x) > 0$. $m(x)$ 在 $(0, x_1)$ 上单调递减, 在 $(x_1, 1)$ 上单调递增. 当 $x \rightarrow 1$ 时, $m(x) \rightarrow +\infty$, 则 $m(x)$ 在 $(0, 1)$ 上有一个零点, 从而 $m(x)$ 在定义域上有三个零点. 11 分

综上所述: 当 $a \leq 4$ 时, $m(x)$ 在定义域上只有一个零点; 当 $a > 4$ 时, $m(x)$ 在定义域上有三个零点. 12 分

(二) 选考题: 共 10 分.

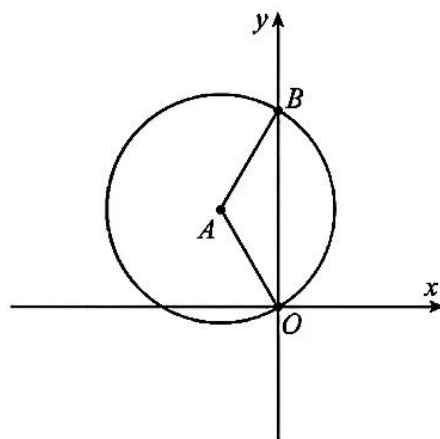
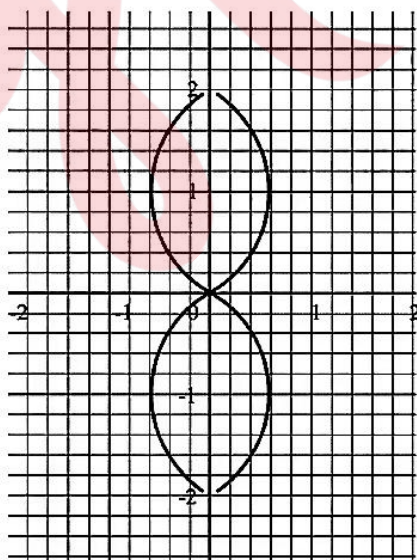
22. (10 分)

解析: (1) 将 $\rho + \left| \frac{2\sqrt{3}}{3} \cos \theta \right| = |2 \sin \theta|$ 两边同乘 ρ 得: $\rho^2 + \left| \frac{2\sqrt{3}}{3} \rho \cos \theta \right| = |2\rho \sin \theta|$, 2 分

即 $x^2 + y^2 + \left| \frac{2\sqrt{3}}{3} x \right| = |2y|$, 4 分

则曲线 C 的直角坐标方程 $\left(|x| + \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 + (|y| - 1)^2 = \frac{4}{3}$ 5 分

(2) 曲线 C 围成的图形



利用对称性知曲线 C 围成的图形的面积等于 $\left(x + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{4}{3} (x \geq 0, y \geq 0)$ 的图形的面积的 4 倍. 6 分

$\left(x + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{4}{3} (x \geq 0, y \geq 0)$ 的图形是圆心在 $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$, 半径为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 的圆在第一象限的部分, $\left(x + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{4}{3} (x \geq 0, y \geq 0)$ 与 y 轴交于点 $B(0, 2)$. $\left(x + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{4}{3} (x \geq 0, y \geq 0)$ 的图形的面积等于扇形 OAB 的面积减去三角形 OAB 的面积. ... 7 分

易得 $\angle OAB = \frac{2\pi}{3}$, $S_{\text{扇形}OAB} = \frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{3} \times \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{4\pi}{9}$, $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 \times \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,
..... 9 分

所以曲线 C 围成的图形的面积为 $\frac{16\pi - 12\sqrt{3}}{9}$ 10 分

23. (10 分)

解析: (1) 由题意有 $\begin{cases} f\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2} + \left|m - \frac{5}{2}\right| = 4 \\ f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{7}{2} + \left|m + \frac{3}{2}\right| = 4 \end{cases}$, 3 分

则 $m = -1$ 5 分

(2) $f(x) = \begin{cases} -1-2x, & x \leq -2 \\ 3, & -2 < x \leq 1 \\ 1+2x, & x > 1 \end{cases}$, 结合 $f(x)$ 的图象(虚线部分)

求得 a 的取值范围为 $(-3, 4)$ 10 分

