

高三数学(理科)试题

本试卷满分 150 分,考试时间 120 分钟。

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、班级和准考证号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再涂其它答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效。

3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 $z = \frac{1+ai}{2+i^{99}}$ ($a \in \mathbf{R}$) 是纯虚数,则 $|z| =$

- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{5}{6}$ D. $\frac{5}{2}$

2. 已知集合 $A = \{x | y = \sqrt{x-1}\}$, $B = \{x | y = \lg(2-x)\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $(1, 2)$ B. $(1, 2]$ C. $[1, 2)$ D. $\mathbf{R}$

3. 已知抛物线 $C: y = 2x^2$, 则 C 的准线方程为

- A. $y = -\frac{1}{8}$ B. $x = -\frac{1}{8}$ C. $y = -\frac{1}{2}$ D. $x = -\frac{1}{2}$

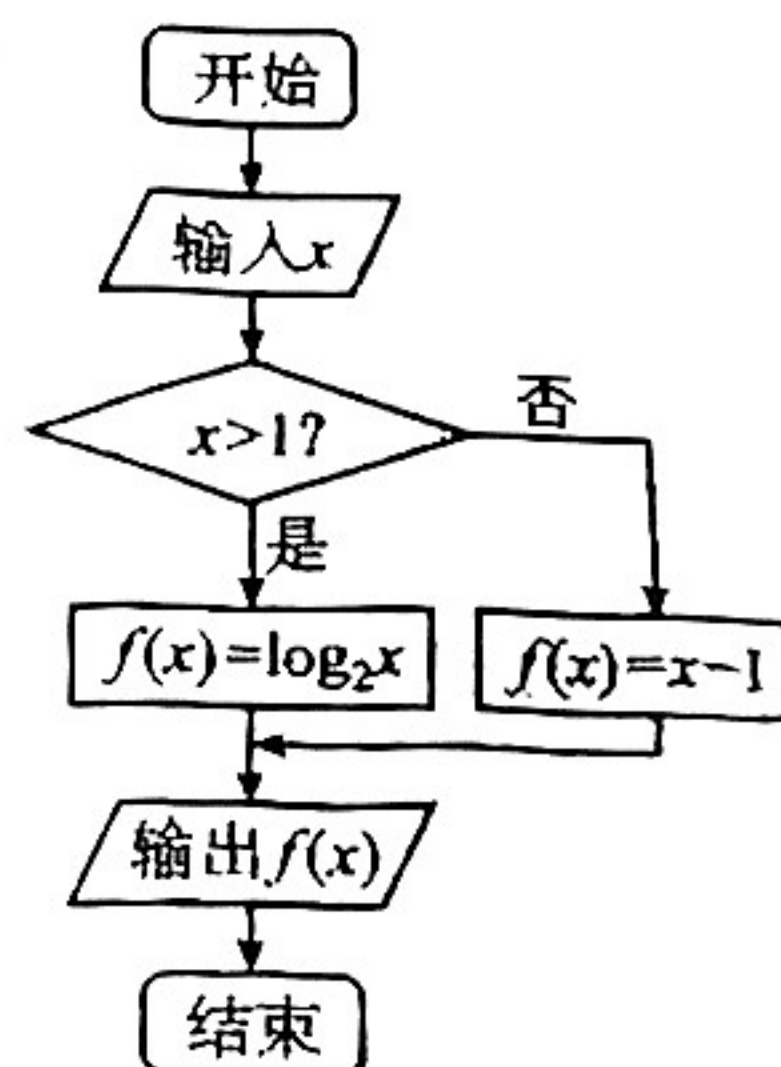
4. 已知单位向量 a, b 满足 $|a-b| = 2|a+b|$, 则 a, b 夹角的余弦值为

- A. $\frac{4}{5}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $-\frac{4}{5}$ D. $-\frac{3}{5}$

5. 如图所示的程序框图中,若输出的函数值 $f(x)$ 在区间 $[-2, 2]$ 内,则

输入的实数 x 的取值范围是

- A. $[-1, 3]$
B. $[-1, 4]$
C. $[\frac{1}{4}, 3]$
D. $[\frac{1}{4}, 4]$



在等差数列 $\{a_n\}$ 中, S_n 为其前 n 项和, 若 $a_1 = 4, a_2 = 10$, 则 $a_n =$

- A. 10 B. 13 C. 16 D. 81

7. 已知 m, n 表示空间中两条不同的直线, α 表示一个平面, 且 $m \parallel \alpha$, 则“ $n \perp \alpha$ ”是“ $m \perp n$ ”的

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

8. $(2x-1)^6$ 的展开式中 x 的偶数次项的系数之和为

- A. 363 B. 364 C. 365 D. 366

9. 定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 且函数 $y=g(2x-1)+2$

为奇函数, 则函数 $y=f(x)$ 图象的对称中心是

- A. $(-1, -1)$ B. $(-1, 1)$ C. $(3, 1)$ D. $(3, -1)$

10. 在区间 $(0, 1)$ 上随机取一个数 k , 使直线 $y=kx+1-k$ 与函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的图象有两个公共点的概率为

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

11. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 P 是椭圆上一点, 若 $\triangle PF_1F_2$ 的

内心为 M , 连接 PM 并延长交 x 轴于点 Q , 且 $|PM| = \sqrt{3}|QM|$, 则椭圆的短轴长为

- A. 2 B. $2\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{3}$ D. $\frac{4\sqrt{6}}{3}$

12. 已知 $a=0.9904, b=\frac{\sin 0.24}{0.24}, c=\frac{0.24}{\tan 0.25}$, 则

- A. $a < c < b$ B. $a < b < c$ C. $c < a < b$ D. $c < b < a$

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在答题卡上.

13. 每年的双十一都是购物者的狂欢节, 据某电商平台统计, 顾客消费额 X (单位: 元) 服从正态分布 $N(150, 30^2)$. 已知该平台有 100000 名顾客, 则该天消费额 X 在 $[120, 210]$ 内的人数约为 _____.

附: 若 $X \sim N(u, \sigma^2)$, 则 $P(u-\sigma \leq X \leq u+\sigma) \approx 0.6827, P(u-2\sigma \leq X \leq u+2\sigma) \approx 0.9545$

14. 已知函数 $f(x) = \frac{3}{2} \sin wx + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos wx (w > 0)$, 对任意的 $x \in \mathbb{R}$, 都有 $f(-x) = f(x + \frac{\pi}{2})$, 且

函数 $f(x)$ 在区间 $(-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4})$ 上单调, 则 w 的值为 _____.

15. 已知正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的上下底面边长分别为 4, 6, 若正四棱台的外接球的球心在正四棱台内部且外接球的表面积为 104π , 则正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 _____.

$$6\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \cdots + \sin \alpha_m = 9k' - m$$

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生依据要求作答。

(一) 必考题：共 60 分。

17. (12 分) 为了提高某海洋公园的知名度，吸引更多游客游玩，公园管理团队决定进行自媒体直播，线上与线下同时进行门票销售，助力该海洋公园的发展。团队在前 7 个月的直播中，门票销售额如下表所示：

时间代码 x (单位：月)	1	2	3	4	5	6	7
销售额 y (单位：万元)	0.84	1.37	2.76	4.43	5.49	7.66	8.94

对数据进行处理后，得到如下统计量的值 (符合线性回归关系)：

$\bar{y}$	$\sum_{i=1}^7 x_i y_i$	$\sum_{i=1}^7 x_i^2$
4.5	165.2	140

参考公式：
$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x}.$$

(1) 根据表格中的数据，求出 y 关于 x 的线性回归方程；

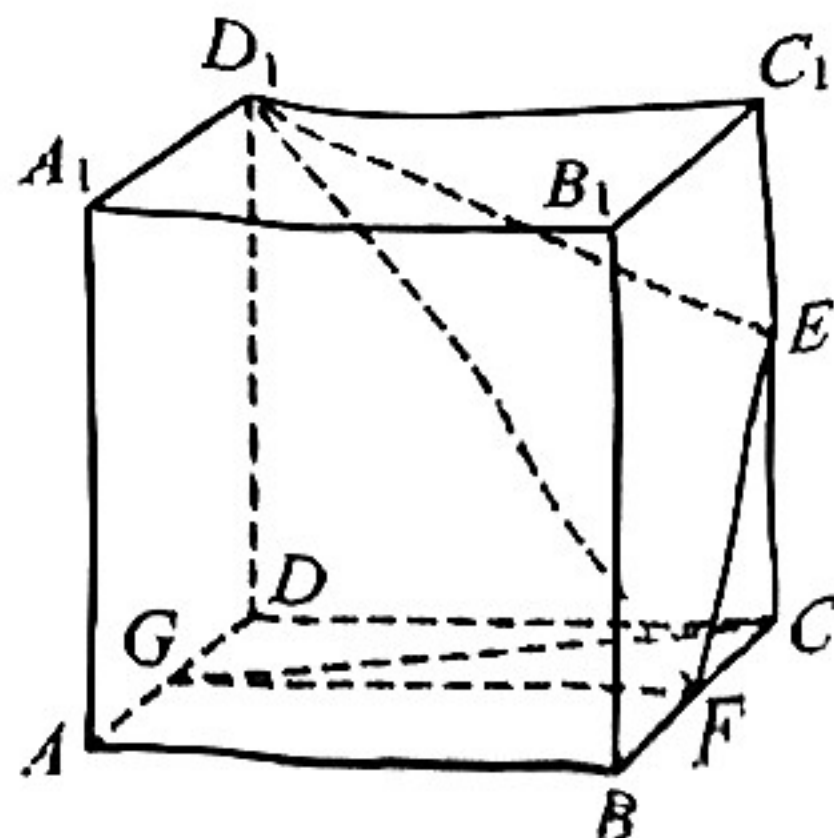
(2) 若直播当月销售额超过 12 万元，能被相关部门评选为“优秀管理团队”，请预测该团队在直播后的第几个月能被评选为“优秀管理团队”。

18. (12 分)

已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2， E 、 F 、 G 分别是 CC_1 、 BC 、 AD 的中点。

(1) 求证： $CG \parallel$ 面 D_1EF ；

(2) 求二面角 $G-D_1F-E$ 的平面角的正弦值。



18. (12分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $\sin 2B = \sin A + \sin C$.

(1) 求 B .

(2) AC 边上的点 D 满足 $AD = 2DC$, 若 $BD = 2$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

19. (12分)

已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 1, b > 0)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , 右顶点为 A , 右准线为 l , 点 P 在双曲线 C 的右支上, 且 $|PF_1| = 2|PF_2|$, 点 Q 在右准线 l 上, 且 $|AQ| = |PQ|$, 双曲线 C 的离心率为 e .

(1) 求双曲线 C 的方程.

(2) 过 F_2 的直线与 C 交于 M, N 两点, 连接 MF_1 交 l 于点 Q , 证明直线 QN 过右焦点 F_2 .

20. (12分)

已知函数 $f(x) = \ln(x+1), g(x) = e^x - 1$.

(1) 记函数 $h(x) = f(x) - g(x)$, 求函数 $h(x)$ 的极大值点.

(2) 记函数 $m(x) = [g(x) + 2] \cdot [f(x) - f(-x)] - a h(x)$, 讨论函数 $m(x)$ 的零点.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题记分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

在直角坐标系 xOy 中, 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho + \left| \frac{2\sqrt{3}}{3} \cos \theta \right| = |2 \sin \theta|$.

(1) 求曲线 C 的直角坐标方程.

(2) 求曲线 C 围成的图形的面积.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

已知函数 $f(x) = |x+2| + |x+m| (m \in \mathbb{R})$, 且 $f(x) \leq 4$ 的解集为 $\left[-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

(1) 求 m 的值;

(2) 设函数 $g(x) = |x-a| (a \in \mathbb{R})$, 若存在 $x \in [0, 1]$ 使 $f(x) > g(x)$ 成立, 求实数 a 的范围.