

高三数学(文科)试题参考答案及评分标准

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.

1. 答案：B

解析：因为 $i^{99} = i^{4 \times 24 + 3} = i^3 = -i$ ，所以 $z = \frac{1+ai}{2-i} = \frac{(1+ai)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{2-a}{5} + \frac{2a+1}{5}i$. 若 z 为纯虚数，则 $\frac{2-a}{5} = 0$ ，即 $a=2$ ， $z=i$ ，故 $|z|=1$.

2. 答案：C

解析：因为 $A=[1, +\infty)$ ， $B=(-\infty, 2)$ ，所以 $A \cap B = [1, 2)$.

3. 答案：A

解析：抛物线 $C: x^2 = \frac{1}{2}y$ ，其中 $p = \frac{1}{4}$ ，故 C 的准线方程为 $y = -\frac{p}{2} = -\frac{1}{8}$.

4. 答案：D

解析：将 $|a-b|=2|a+b|$ 两边平方后化简可得： $3a^2+3b^2+10a \cdot b=0$ ，由 $\cos \langle a, b \rangle = \frac{a \cdot b}{|a||b|}$ 可得 $\cos \langle a, b \rangle = -\frac{3}{5}$.

5. 答案：B

解析：当 $x \leq 1$ 时， $f(x) = x-1$ ；当 $x > 1$ 时， $f(x) = \log_2 x$ ；则 $f(x)$ 是单增函数，若 $x = -1$ ，则 $f(x) = -2$ ，若 $x = 4$ ，则 $f(x) = 2$ ，选项 B 符合题意.

6. 答案：B

解析：由等差数列的性质可得 $m=5$ ， $S_5 = 5a_3 = 35$ ，则 $a_3 = 7$ ，从而 $a_5 = 13$.

7. 答案：A

解析： $n \perp \alpha \Rightarrow m \perp n$ 显然成立. $m \perp n \not\Rightarrow n \perp \alpha$ ，理由如下：在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，设 m 取为直线 AB ， α 为平面 $A_1B_1C_1D_1$ ， n 为直线 B_1C_1 ，满足 $m \perp n$ 但是 $n \subseteq \alpha$ ，所以“ $n \perp \alpha$ ”是“ $m \perp n$ ”的充分不必要条件.

8. 答案：C

解析：由点 $(0, -2)$ 在曲线 $y=f(x)$ 上可得 $a=-3$. 因为 $f'(x) = -3 - \sin x$ ，则点 $(0, -2)$ 处的切线斜率为 $f'(0) = -3$ ，故切线方程为 $3x+y+2=0$.

9. 答案：D

解析：函数 $y=g(2x-1)+1$ 可由 $y=g(x)$ 先向右平移 1 个单位，再将横坐标变为原来的一半，

然后向上平移 1 个单位. 因为 $y=g(2x-1)+1$ 的对称中心为 $(0,0)$, 所以 $y=g(x)$ 的对称中心为 $(-1,-1)$, 而 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 故 $y=f(x)$ 图象的对称中心是 $(3,-1)$.

10. 答案: C

解析: 函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的图象是一个圆心在原点, 半径为 1 的上半圆, 直线 $l: y=kx+1-k$ ($0 < k < 1$) 与 y 轴的交点为 $(0, 1-k)$, 结合图形要使直线 l 与 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的图象有两个公共点, 只需 $y=kx+1-k$ 在 $x=-1$ 处的函数值非负即可, 从而 $0 < k \leq \frac{1}{2}$, 故有两个公共点的概

$$\text{率 } p = \frac{\frac{1}{2} - 0}{1 - 0} = \frac{1}{2}.$$

11. 答案: A

解析: 设 $f(x) = \tan x - x$ ($0 < x < 1$), $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 > 0$, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 则

$f(x) > f(0) = 0$ ($0 < x < 1$), 即 $\tan x > x$ ($0 < x < 1$). 故 $b = \tan \frac{1}{4} > \frac{1}{4}$. 显然 $b < 1$. $g(x) =$

$\ln(1+x) - x$ ($0 < x < 1$), $g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 < 0$, 则 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 则 $g(x) < g(0)$

$= 0$ ($0 < x < 1$), 即 $\ln(1+x) < x$ ($0 < x < 1$). 故 $a = \ln\left(1 + \frac{1}{4}\right) < \frac{1}{4}$. 显然 $c > 1$.

综上: $a < b < c$

12. 答案: D

解析: 连接 MF_1, MF_2 , 在 $\triangle PF_1Q$ 和 $\triangle PF_2Q$ 中, 利用角平分线定理可得, $\frac{PM}{QM} = \frac{PF_1}{QF_1} =$

$\frac{PF_2}{QF_2} = \sqrt{3}$, 由等比定理可得 $\frac{PF_1}{QF_1} = \frac{PF_2}{QF_2} = \frac{PF_1 + PF_2}{QF_1 + QF_2} = \frac{2a}{2c}$, 从而 $c = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $b = \frac{2\sqrt{6}}{3}$. 故椭圆的短

轴长为 $2b = \frac{4\sqrt{6}}{3}$.

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 答案: 106

解析: 依题意可知, 在系统抽样中, 首次抽到 006 号, 以后每隔 $\frac{600}{24} = 25$ 个号抽到一个人, 所以

所抽取的编号为 006, 031, 056, 081, 106, 131, $\dots$, 581, 所以在第五组中 (编号是 101 ~ 125) 之间抽取的编号为 106.

14. 答案: $\frac{4}{3}$

解析: $f(x) = \sqrt{3} \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$ ($\omega > 0$), 由对任意的 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 得函数 $f(x)$ 在 $x = \frac{\pi}{4}$ 取最大值, 则 $\frac{\pi}{4}\omega + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$. 那么 $\omega = \frac{4}{3} + 8k, k \in \mathbf{Z}$. 故 ω 的最小值为 $\frac{4}{3}$.

15. 答案: $\frac{380\sqrt{2}}{3}$

解析: 易得外接球的半径 $R = \sqrt{26}$, 设正方形 $ABCD$ 和正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心分别为 O 和 O_1 , 外接球的球心为 M , 则 M 一定在线段 OO_1 上, 连接 $OO_1, OB, MB, MB_1, O_1B_1$, 易得 $MO = 3\sqrt{2}$, $MO_1 = 2\sqrt{2}$, $V_{\text{四棱台}ABCD-A_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{3}OO_1 \times (S_{\text{正方形}ABCD} + S_{\text{正方形}A_1B_1C_1D_1} + \sqrt{S_{\text{正方形}ABCD} \times S_{\text{正方形}A_1B_1C_1D_1}}) = \frac{380\sqrt{2}}{3}$.

16. 答案: 35

解析: 由 $\cos a_n = \frac{1}{\tan a_{n+1}}$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 得 $\cos a_n \tan a_{n+1} = 1$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 那么

$$6 \sin a_1 \cdot \sin a_2 \cdot \cdots \cdot \sin a_m = 6 \tan a_1 \cos a_1 \tan a_2 \cos a_2 \cdots \tan a_m \cos a_m = 6 \cos a_m.$$

由 $\cos a_n = \frac{1}{\tan a_{n+1}}$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 得 $\tan a_{n+1} = \frac{1}{\cos a_n}$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 两边平方得

$$\tan^2 a_{n+1} = \frac{1}{\cos^2 a_n} = \frac{\sin^2 a_n + \cos^2 a_n}{\cos^2 a_n} = \tan^2 a_n + 1,$$

则 $\{\tan^2 a_n\}$ 是以 1 为首项, 1 为公差的等差数列, 即 $\tan^2 a_n = n$, 因为 $a_n \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

所以 $\tan a_n = \sqrt{n}$, 那么 $\cos a_m = \frac{1}{\tan a_{m+1}} = \frac{1}{\sqrt{m+1}}$, 则 $\frac{6}{\sqrt{m+1}} \geq 1 \Rightarrow m \leq 35$, 正整数 m 的最大值为 35.

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (12 分)

解析: (1) 由题意 $\hat{b} = \frac{165.2 - 7 \times 4 \times 4.5}{140 - 7 \times 4^2} = 1.4$, 2 分

$\hat{a} = 4.5 - 1.4 \times 4 = -1.1$, 4 分

则 $y = 1.4x - 1.1$ 6 分

(2) 由题意可得 $1.4x - 1.1 > 12 \Rightarrow x > \frac{131}{14}$, 9 分

因为 $9 < \frac{131}{14} < 10$, 11 分

则第 10 个月能被评选为“优秀管理团队”. 12 分

18. (12 分)

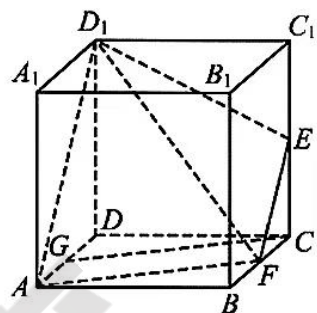
解析: (1) 连接 D_1A, FA , 因为 E, F 分别是 CC_1, BC 的中点,

所以 $EF \parallel D_1A$, 所以 A, F, E, D_1 四点共面. 2 分

由于 G 分别是 AD 的中点, 则 $AG \parallel FC$ 且 $AG = FC$, 3 分

那么四边形 $AGCF$ 为平行四边形, 从而 $CG \parallel AF$ 5 分

又 $CG \not\subset$ 面 $D_1EF, AF \subset$ 面 D_1EF , 故 $CG \parallel$ 面 D_1EF 6 分



(2) 由 $CG \parallel$ 面 D_1EF 知点 G 到平面 D_1EF 的距离等于点 C 到平面 D_1EF 的距离. 7 分

易得 $D_1E = \sqrt{5}, EF = \sqrt{2}, D_1F = 3$ 8 分

利用余弦定理得 $\cos \angle D_1EF = -\frac{\sqrt{10}}{10}$,

则 $\sin \angle D_1EF = \frac{3\sqrt{10}}{10}, S_{\triangle D_1EF} = \frac{1}{2} D_1E \cdot EF \cdot \sin \angle D_1EF = \frac{3}{2}$ 9 分

设点 C 到平面 D_1EF 的距离为 d , 利用等体积法 $V_{C-D_1EF} = \frac{1}{3} S_{\triangle CEF} \cdot D_1C_1 = \frac{1}{3} S_{\triangle D_1EF} \cdot d$

可得 $d = \frac{S_{\triangle CEF} \cdot D_1C_1}{S_{\triangle D_1EF}} = \frac{2}{3}$ 11 分

即点 G 到平面 D_1EF 的距离为 $\frac{2}{3}$ 12 分

19. (12 分)

解析: (1) 因为 $\frac{1 + \sin 2B + \cos 2B}{\sin 2B + 2\sin^2 B} = \frac{2\sin B \cos B + 2\cos^2 B}{2\sin B \cos B + 2\sin^2 B} = \frac{\cos B}{\sin B} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 4 分

因为 $B \in (0, \pi)$, 5 分

所以 $B = \frac{\pi}{3}$ 6 分

(2) 设 AC 边的中点为 D , 则 $BD = 2$, 因为 $2\vec{BD} = \vec{BC} + \vec{BA}$, 7 分

平方可得: $4|\vec{BD}|^2 = |\vec{BA}|^2 + |\vec{BC}|^2 + 2\vec{BA} \cdot \vec{BC}$, 代入得: $16 = a^2 + c^2 + ac$,

所以 $16 \geq 3ac \Rightarrow ac \leq \frac{16}{3}$ 当且仅当 $a = c$ 时等号成立. 9 分

在 $\triangle ABC$ 中由余弦定理, $b^2 = a^2 + c^2 - ac = 16 - 2ac$ 11 分

因为 $ac \leq \frac{16}{3}$, 所以 $b^2 \geq \frac{16}{3}$, 即 b 的最小值为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$, 当且仅当 $a = c$ 时等号成立. 12 分

20. (12 分)

解析: (1) 由题意有 $\begin{cases} a - \frac{a^2}{c} = \sqrt{3} - 1 \\ a + c = 3 + \sqrt{3} \end{cases}$, 2 分

解得 $a = \sqrt{3}, c = 3$, 从而 $b^2 = 6$ 3 分

所以双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = 1$ 4 分

(2) 当直线 MN 斜率不为 0 时, 设直线 $MN: x = my + 3$,

由 $\begin{cases} x = my + 3 \\ \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = 1 \end{cases}$ 可得: $(2m^2 - 1)y^2 + 12my + 12 = 0$ 5 分

因为过 F_2 的直线与 C 交于 M, N 两点, 则 $\begin{cases} 2m^2 - 1 \neq 0 \\ \Delta = 144m^2 - 48(2m^2 - 1) > 0 \end{cases} \Rightarrow 2m^2 \neq 1$ 6 分

设 $M(my_1 + 3, y_1), N(my_2 + 3, y_2)$, 则 $y_1 + y_2 = \frac{-12m}{2m^2 - 1}, y_1 y_2 = \frac{12}{2m^2 - 1}$ 7 分

直线 $MF_1: y = \frac{y_1}{my_1 + 6}(x + 3)$ 交 l 于点 Q , 则 $Q\left(1, \frac{4y_1}{my_1 + 6}\right)$ 8 分

设直线 QN 交 x 轴于点 $H(x, 0)$, 由于 Q, N, H 三点共线, 则 $\overrightarrow{HQ} \parallel \overrightarrow{NQ}$,

$\overrightarrow{HQ} = \left(1 - x, \frac{4y_1}{my_1 + 6}\right), \overrightarrow{NQ} = \left(-my_2 - 2, \frac{4y_1 - my_1 y_2 - 6y_2}{my_1 + 6}\right)$, 9 分

那么 $\frac{4y_1}{my_1 + 6}(-my_1 - 2) = \frac{4y_1 - my_1 y_2 - 6y_2}{my_1 + 6}(1 - x)$,

故 $x = \frac{12y_1 + 3my_1 y_2 - 6y_2}{4y_1 - my_1 y_2 - 6y_2} = \frac{12y_1 + \frac{36m}{2m^2 - 1} - 6\left(\frac{-12m}{2m^2 - 1} - y_1\right)}{4y_1 - \frac{12m}{2m^2 - 1} - 6\left(\frac{-12m}{2m^2 - 1} - y_1\right)} = \frac{9}{5}$,

当直线 MN 斜率为 0 时, 直线 QN 所在直线为 x 轴, 必过定点 $\left(\frac{9}{5}, 0\right)$, 11 分

即直线 QN 过定点即 $\left(\frac{9}{5}, 0\right)$ 12 分

21. (12 分)

解析: (1) $h(x) = f(x) - g(x) = \ln x - \frac{e^x}{e} + 1$, 则 $h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{e^x}{e} (x > 0)$, 1 分

$h'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减, 又因为 $h'(1) = 0$ 2 分

所以 $h(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 单调递增, 在区间 $(1, +\infty)$ 单调递减, 故 $h(x)$ 的极大值点为 $x = 1$

..... 4 分

$$(2)m(x)=f(x)-ag(x)=\ln x-a\left(\frac{e^x}{e}-1\right), m(1)=0, m'(x)=\frac{e-axe^x}{ex}. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

①当 $a \leq 0$ 时, $m'(x) > 0$, $m(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则 $m(x)$ 只有一个零点 $x=1$. $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

②当 $a > 0$ 时, 设 $w(x) = e - axe^x$, 则 $w'(x) = -a(x+1)e^x < 0$, 所以 $w(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减. $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

当 $a=1$ 时, $w(1)=0$, 则当 $x \in (0, 1)$ 时, $w(x) > 0$; 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $w(x) < 0$, 那么 $m(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 则 $m(x)$ 只有一个零点 $x=1$. $\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

当 $a \neq 1$ 时, 显然存在唯一 $x_0 \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ 使得 $w(x_0)=0$, 则当 $x \in (0, x_0)$ 时, $w(x) > 0$; 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $w(x) < 0$, 那么 $m(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递增, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递减, 又当 $x \rightarrow 0$ 时, $m(x) \rightarrow -\infty$; 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $m(x) \rightarrow -\infty$; 此时 $m(x)$ 必有两个零点. $\dots\dots\dots 11 \text{ 分}$

综上所述: 当 $a \leq 0$ 或 $a=1$ 时, $m(x)$ 只有一个零点; 当 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ 时, $m(x)$ 有两个零点. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

(二)选考题:共 10 分。

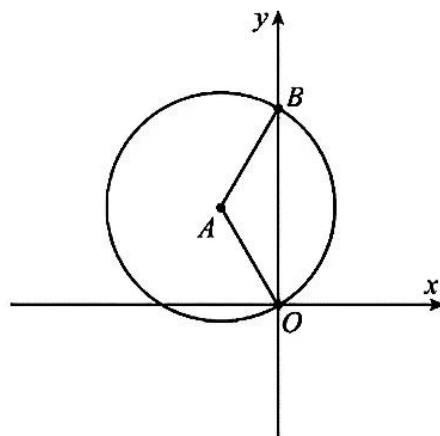
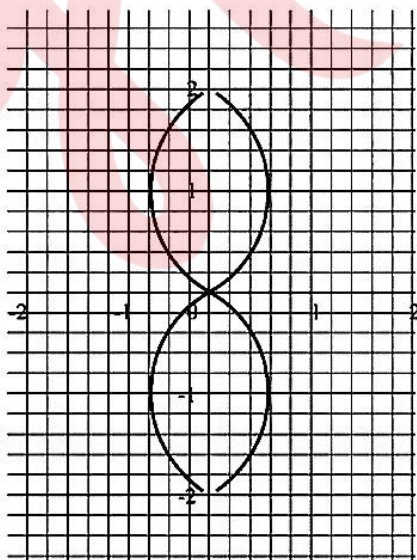
22. (10 分)

解析: (1) 将 $\rho + \left| \frac{2\sqrt{3}}{3} \cos \theta \right| = |2 \sin \theta|$ 两边同乘 ρ 得: $\rho^2 + \left| \frac{2\sqrt{3}}{3} \rho \cos \theta \right| = |2\rho \sin \theta|$, $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

即 $x^2 + y^2 + \left| \frac{2\sqrt{3}}{3} x \right| = |2y|$, $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

则曲线 C 的直角坐标方程 $\left(|x| + \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 + (|y| - 1)^2 = \frac{4}{3}$. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2) 曲线 C 围成的图形



利用对称性知曲线 C 围成的图形的面积等于 $\left(x + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{4}{3} (x \geq 0, y \geq 0)$ 的图形的面积的 4 倍. 6 分

$\left(x + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{4}{3} (x \geq 0, y \geq 0)$ 的图形是圆心在 $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$, 半径为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 的圆在第一象限的部分, $\left(x + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{4}{3} (x \geq 0, y \geq 0)$ 与 y 轴交于点 $B(0, 2)$. $\left(x + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{4}{3} (x \geq 0, y \geq 0)$ 的图形的面积等于扇形 OAB 的面积减去三角形 OAB 的面积. ... 7 分

易得 $\angle OAB = \frac{2\pi}{3}$, $S_{\text{扇形} OAB} = \frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{3} \times \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{4\pi}{9}$, $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 \times \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,
..... 9 分

所以曲线 C 围成的图形的面积为 $\frac{16\pi - 12\sqrt{3}}{9}$ 10 分

23. (10 分)

解析: (1) 由题意有 $\begin{cases} f\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2} + \left|m - \frac{5}{2}\right| = 4 \\ f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{7}{2} + \left|m + \frac{3}{2}\right| = 4 \end{cases}$, 3 分

则 $m = -1$ 5 分

(2) $f(x) = \begin{cases} -1 - 2x, & x \leq -2 \\ 3, & -2 < x \leq 1 \\ 1 + 2x, & x > 1 \end{cases}$, 结合 $f(x)$ 的图象(虚线部分)

求得 a 的取值范围为 $(-3, 4)$ 10 分

