

秘密 ★ 启用前

## 高三数学(文科)试题

本试卷满分 150 分,考试时间 120 分钟。

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、班级和准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数  $z = \frac{1+ai}{2+i^{99}}$  ( $a \in \mathbb{R}$ ) 是纯虚数,则  $|z| =$

- A.  $\frac{1}{2}$                       B. 1                      C.  $\frac{5}{6}$                       D.  $\frac{5}{2}$

2. 已知集合  $A = \{x | y = \sqrt{x-1}\}$ ,  $B = \{x | y = \lg(2-x)\}$ , 则  $A \cap B =$

- A.  $(1, 2)$                       B.  $(1, 2]$                       C.  $[1, 2)$                       D.  $\mathbb{R}$

3. 已知抛物线  $C: y = 2x^2$ , 则  $C$  的准线方程为

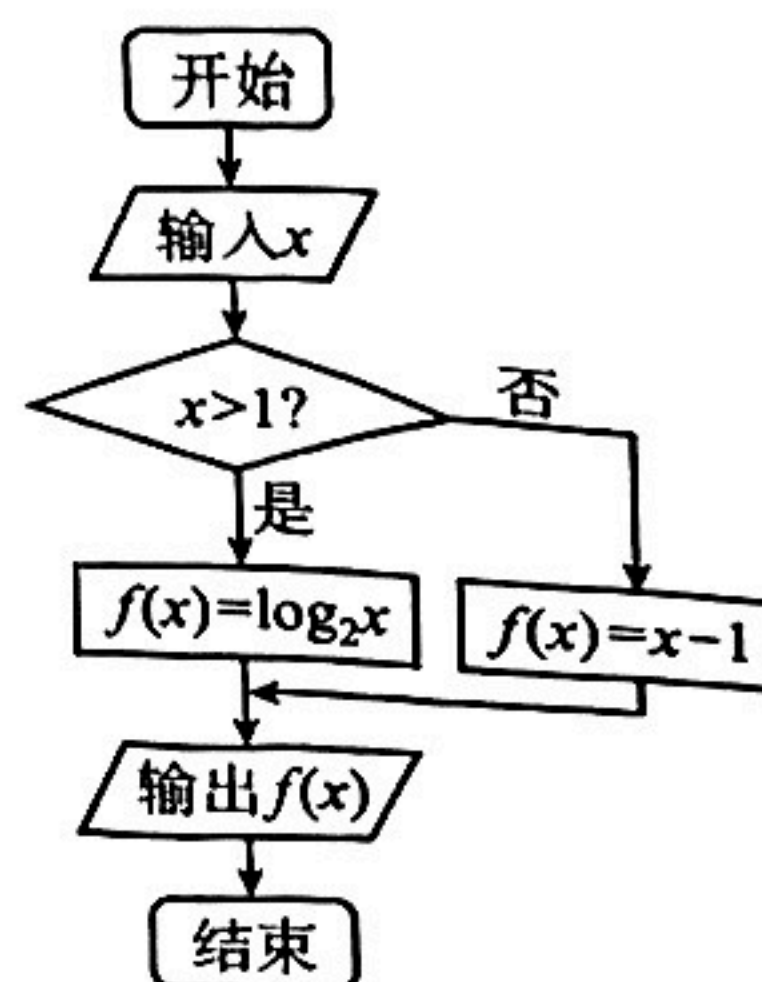
- A.  $y = -\frac{1}{8}$                       B.  $x = -\frac{1}{8}$                       C.  $y = -\frac{1}{2}$                       D.  $x = -\frac{1}{2}$

4. 已知单位向量  $a, b$  满足  $|a-b| = 2|a+b|$ , 则  $a, b$  夹角的余弦值为

- A.  $\frac{4}{5}$                       B.  $\frac{3}{5}$                       C.  $-\frac{4}{5}$                       D.  $-\frac{3}{5}$

5. 如图所示的程序框图中,若输出的函数值  $f(x)$  在区间  $[-2, 2]$  内,则输入的实数  $x$  的取值范围是

- A.  $[-1, 3]$   
B.  $[-1, 4]$   
C.  $[\frac{1}{4}, 3]$   
D.  $[\frac{1}{4}, 4]$





6. 在等差数列  $\{a_n\}$  中,  $S_n$  为其前  $n$  项和. 若  $a_2=4, a_1+a_7=a_3+a_m, S_m=35 (m \in \mathbb{Z})$ , 则  $a_m=$   
 A. 10                      B. 13                      C. 16                      D. 81
7. 已知  $m, n$  表示空间中两条不同的直线,  $\alpha$  表示一个平面, 且  $m \parallel \alpha$ . 则“ $n \perp \alpha$ ”是“ $m \perp n$ ”的  
 A. 充分不必要条件                      B. 必要不充分条件  
 C. 充要条件                      D. 既不充分也不必要条件
8. 已知函数  $f(x)=ax+a+\cos x (a \in \mathbb{R})$ , 则曲线  $y=f(x)$  上一点  $(0, -2)$  处的切线方程为  
 A.  $2x+y+2=0$                       B.  $x+y+2=0$                       C.  $3x+y+2=0$                       D.  $3x+y-2=0$
9. 定义在  $\mathbb{R}$  上的函数  $y=f(x)$  与  $y=g(x)$  的图象关于直线  $x=1$  对称, 且函数  $y=g(2x-1)+1$  为奇函数, 则函数  $y=f(x)$  图象的对称中心是  
 A.  $(-1, -1)$                       B.  $(-1, 1)$                       C.  $(3, 1)$                       D.  $(3, -1)$
10. 在区间  $(0, 1)$  上随机取一个数  $k$ , 使直线  $y=kx+1-k$  与函数  $y=\sqrt{1-x^2}$  的图象有两个公共点的概率为  
 A.  $\frac{1}{4}$                       B.  $\frac{1}{3}$                       C.  $\frac{1}{2}$                       D.  $\frac{2}{3}$
11. 已知  $a=\ln \frac{5}{4}, b=\tan \frac{1}{4}, c \cdot \ln c=1$ , 则  
 A.  $a < b < c$                       B.  $b < a < c$                       C.  $a < c < b$                       D.  $b < c < a$
12. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 点  $P$  是椭圆上一点, 若  $\triangle PF_1F_2$  的内心为  $M$ , 连接  $PM$  并延长交  $x$  轴于点  $Q$ , 且  $|PM| = \sqrt{3}|QM|$ , 则椭圆的短轴长为  
 A. 2                      B.  $2\sqrt{2}$                       C.  $2\sqrt{3}$                       D.  $\frac{4\sqrt{6}}{3}$

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在答题卡上.

13. 2024 年 2 月, 教育部办公厅印发通知, 就实施银龄教师支持民办教育行动有关工作进行部署. 明确组织遴选一批优秀退休教师, 面向各级各类民办学校, 特别是民办高校开展支教、支研. 某省现有符合条件的退休教师 600 人, 随机编号为 001, 002,  $\dots$ , 600, 现采用系统抽样方法抽取 24 人参加对口支教活动, 分组后在第一组随机抽得的编号为 006, 则在第五组中应抽取的编号为\_\_\_\_\_.
14. 已知函数  $f(x) = \frac{3}{2}\sin wx + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos wx (w > 0)$ , 对任意的  $x \in \mathbb{R}$ , 都有  $f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ , 则  $w$  的最小值为\_\_\_\_\_.
15. 已知正四棱台  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的上下底面边长分别为 4, 6, 若正四棱台的外接球的球心在正四棱台内部且外接球的表面积为  $104\pi$ , 则正四棱台  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的体积为\_\_\_\_\_.



16. 数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = \frac{\pi}{4}$ ,  $\cos a_n = \frac{1}{\tan a_{n+1}}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ),  $a_n \in (0, \frac{\pi}{2})$ , 若不等式  $\sin a_1 \cdot \sin a_2 \cdots \sin a_m \geq \frac{1}{6}$  恒成立, 则正整数  $m$  的最大值为\_\_\_\_\_.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题, 考生依据要求作答。

(一) 必考题: 共 60 分。

17. (12 分) 为了提高某海洋公园的知名度, 吸引更多游客游玩, 公园管理团队决定进行自媒体直播, 线上与线下同时进行门票销售, 助力该海洋公园的发展。团队在前 7 个月的直播中, 门票销售额如下表所示:

|                  |      |      |      |      |      |      |      |
|------------------|------|------|------|------|------|------|------|
| 时间代码 $x$ (单位: 月) | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    |
| 销售额 $y$ (单位: 万元) | 0.84 | 1.37 | 2.76 | 4.43 | 5.49 | 7.66 | 8.94 |

对数据进行处理后, 得到如下统计量的值 (符合线性回归关系):

|           |                        |                      |
|-----------|------------------------|----------------------|
| $\bar{y}$ | $\sum_{i=1}^7 x_i y_i$ | $\sum_{i=1}^7 x_i^2$ |
| 4.5       | 165.2                  | 140                  |

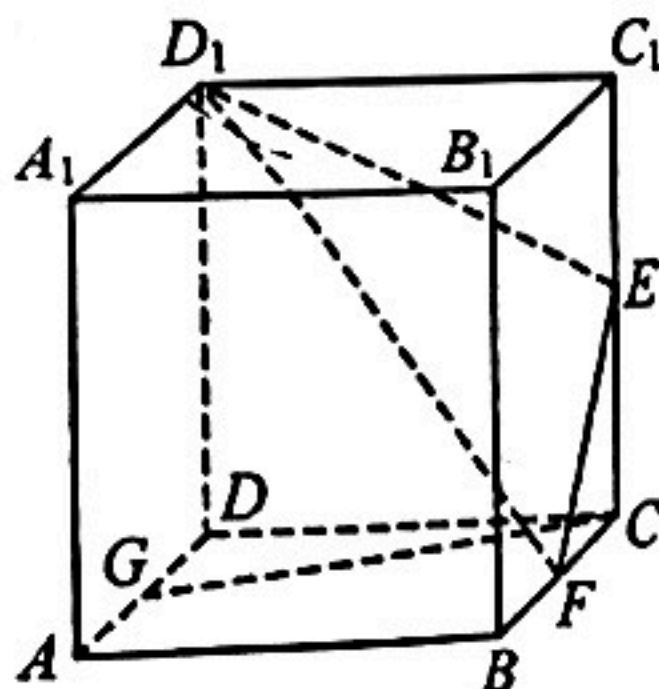
参考公式:  $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}$ ,  $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x}$ .

- 根据表格中的数据, 求出  $y$  关于  $x$  的线性回归方程;
- 若直播当月销售额超过 12 万元, 能被相关部门评选为“优秀管理团队”, 请预测该团队在直播后的第几个月能被评选为“优秀管理团队”。

18. (12 分)

已知正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的棱长为 2,  $E$ 、 $F$ 、 $G$  分别是  $CC_1$ 、 $BC$ 、 $AD$  的中点。

- 求证:  $CG \parallel$  面  $D_1EF$ ;
- 求点  $G$  到平面  $D_1EF$  的距离。



19. (12 分)

在  $\triangle ABC$  中, 角  $A$ 、 $B$ 、 $C$  的对边分别为  $a$ 、 $b$ 、 $c$ , 且  $\frac{1 + \sin 2B + \cos 2B}{\sin 2B + 2\sin^2 B} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

- 求  $B$ ;
- 若  $AC$  边上的中线长为 2, 求  $b$  的最小值。



20. (12 分)

已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 1, b > 0)$  的左右焦点分别为  $F_1, F_2$ ,  $C$  的右顶点到直线  $l: x = \frac{a^2}{c}$  的距离为  $\sqrt{3} - 1$ , 双曲线右支上的点到  $F_1$  的最短距离为  $3 + \sqrt{3}$ .

(1) 求双曲线  $C$  的方程;

(2) 过  $F_2$  的直线与  $C$  交于  $M, N$  两点, 连接  $MF_1$  交  $l$  于点  $Q$ , 证明直线  $QN$  过  $x$  轴上一定点.

21. (12 分)

已知函数  $f(x) = \ln x, g(x) = \frac{e^x}{e} - 1$ .

(1) 记函数  $h(x) = f(x) - g(x)$ , 求函数  $h(x)$  的极大值点;

(2) 记函数  $m(x) = f(x) - ag(x)$ , 讨论函数  $\varphi(x)$  的零点个数.

(二) 选考题: 共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题记分。

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

在直角坐标系  $xOy$  中, 以坐标原点为极点,  $x$  轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线  $C$  的极坐标方程为  $\rho + \left| \frac{2\sqrt{3}}{3} \cos \theta \right| = |2 \sin \theta|$ .

(1) 求曲线  $C$  的直角坐标方程;

(2) 求曲线  $C$  围成的图形的面积.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

已知函数  $f(x) = |x+2| + |x+m| (m \in \mathbf{R})$ , 且  $f(x) \leq 4$  的解集为  $\left[-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right]$ .

(1) 求  $m$  的值;

(2) 设函数  $g(x) = |x-a| (a \in \mathbf{R})$ , 若存在  $x \in [0, 1]$  使  $f(x) > g(x)$  成立, 求实数  $a$  的取值范围.