

工作秘密
严禁泄露

自贡市普高 2024 届第三次诊断性考试 数学试题（理科）

本试卷共 6 页，23 题（含选考题），全卷满分 150 分，考试时间 120 分钟。

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答：用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 选考题的作答：先把所选题目的题号在答题卡上指定的位置用 2B 铅笔涂黑。答案写在答题卡上对应的答题区域内，写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是最符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ ， $B = \{x | \log_2(x+1) < 2\}$ ，则 $A \cup B =$ （ ）

- A. $(-1, 3)$ B. $(-3, 3)$ C. $[-1, 3)$ D. $[-1, 3]$

2. 在复平面内，复数 z_1, z_2 对应的向量分别是 $\overrightarrow{OA} = (-2, 3)$ ， $\overrightarrow{OB} = (3, -2)$ ，则复数 $\frac{z_2}{z_1 + z_2}$ 对应的点位于（ ）

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

3. 已知 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ，则“ $\sin \alpha = \cos \beta$ ”是“ $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$ ”的（ ）

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

4. 已知圆 C 的圆心是抛物线 $x^2 = 8y$ 的焦点，直线 $2x - y - 3 = 0$ 与圆 C 相交于 A, B 两点，且 $|AB| = 2$ ，则圆 C 的半径为（ ）

- A. $\sqrt{6}$ B. $\frac{\sqrt{30}}{5}$ C. 3 D. $\frac{3\sqrt{30}}{5}$

5. 自然常数 e 又叫欧拉数的常数 ($e \approx 2.71828$). 某数学老师在设置密码锁的数字密码时, 计划用自然常数的前 6 位数字 2, 7, 1, 8, 2, 8 进行排列确定密码, 要求两个 2 相邻, 两个 8 不相邻, 则这位数学老师可以设置的不同密码共有 () 种

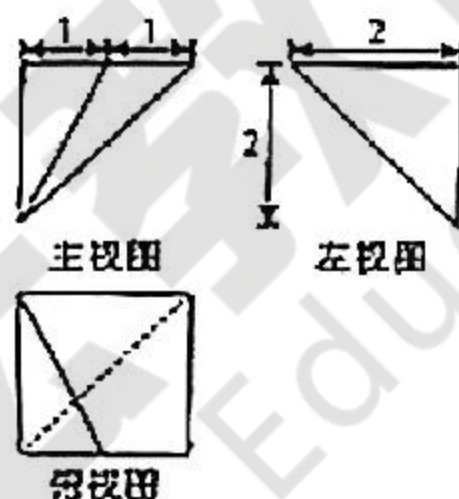
A. 36 B. 32 C. 24 D. 16

6. 已知向量 $\vec{a} = (3, 0)$, $\vec{b} = (-1, 1)$, $\vec{c} = (1, k)$, 若 $(\vec{a} + \vec{b}) \parallel \vec{c}$, 则实数 k 的值为 ()

A. -2 B. -1 C. 2 D. $\frac{1}{2}$

7. 某几何体的三视图如图, 则该几何体的所有棱中, 最长棱的长度为 ()

A. $\sqrt{5}$
B. $2\sqrt{2}$
C. $2\sqrt{3}$
D. 4



8. 已知角 α 满足 $\frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = 3$, 则 $\sin 2\alpha =$ ()

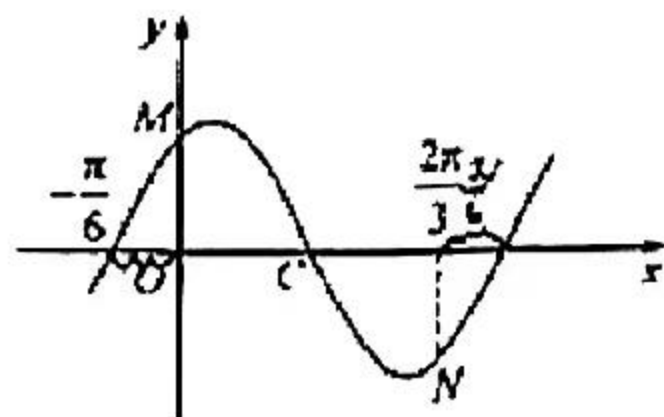
A. $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$ B. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ C. $-\frac{3}{5}$ D. $\frac{3}{5}$

9. 设 F_1, F_2 分别为双曲线 $C: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的上, 下焦点, 过点 F_2 的直线 l 与 C 的一条渐近线交于点 P , 若 $PF_1 \perp y$ 轴, 且点 F_1 到 l 的距离为 $\sqrt{2}b$, 则 C 的离心率为 ()

A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{5}$ D. $2\sqrt{2}$

10. 函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示, $f(x)$ 的图象与 y 轴交于 M 点, 与 x 轴交于 C 点, 点 N 在 $f(x)$ 图象上, 点 M, N 关于点 C 对称, 下列说法错误的是 ().

A. 函数 $f(x)$ 的最小正周期是 π
B. 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{5\pi}{6}, 0)$ 对称
C. 函数 $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6})$ 单调递增
D. 函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 后, 得到函数 $g(x)$ 的图象, 则 $g(x)$ 为奇函数



11. 已知球 O 半径为 4, 圆 O_1 与圆 O_2 为球体的两个截面圆, 它们的公共弦长为 4, 若

$OO_1 = 3, OO_2 = \sqrt{3}$, 则两截面圆的圆心距 $O_1O_2 =$ ()

- A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ C. $3 + \sqrt{3}$ D. $2\sqrt{3}$

12. 定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x-1) = f(3-x)$, 当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = x^2$ 若

$g(x) = \log_6 |x-1|$, 下列命题:

① $f(x)$ 是周期函数;

② 函数 $f(x)$ 的图象在 $x = \frac{7}{2}$ 处的切线方程为 $4x + 4y - 15 = 0$;

③ 函数 $f(x)$ 的图象与函数 $g(x)$ 的图象的所有交点的横坐标之和为 12;

④ $f(2022) + f(2023) + f(2024) + f(2025) = 2$.

其中正确命题的个数为 ()

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

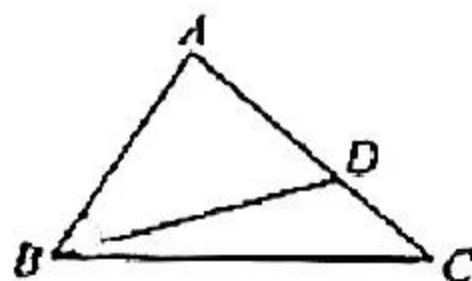
13. 若 x, y 满足 $\begin{cases} x-2y-2 \leq 0 \\ x-y+1 \geq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$, 则 $z = 3x + 2y$ 的最大值为_____.

14. 函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x - 1 & (x \leq 1) \\ x^2 - x & (x > 1) \end{cases}$, $f(a) = 2$ 则 $a =$ _____.

15. 若 $x^3 + (x+2)^7 = a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)^2 + \cdots + a_7(x+1)^7$, 则 $a_2 =$ _____. (用具体数字作答)

16. 如图, D 为 $\triangle ABC$ 的边 AC 上一点, $|AD| = 2|DC|$, $\angle ABC = 60^\circ$, $|AB| + 2|BC| = 4$,

$\triangle ABC$ 的面积为 S , 则 $\frac{|BD|^2}{S}$ 的最小值为_____.



三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：共 60 分

17. (12 分)

某公司是无人机特种装备综合型科技创新企业，产品无人机主要应用于森林消防、物流运输、航空测绘、军事侦察等领域。公司生产的 A、B 两种类型无人运输机性能都比较出色。该公司分别收集了 A、B 两种类型无人运输机在 5 个不同的地点测试的某项指标数 $x_i, y_i (i=1,2,3,4,5)$ ，数据如下表所示：

	地点 1	地点 2	地点 3	地点 4	地点 5
A 型无人运输机指标数 x_i	2	4	5	6	8
B 型无人运输机指标数 y_i	3	4	4	4	5

附：相关公式及数据： $r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \cdot \sqrt{0.9} \approx 0.95$ 。

(1) 试求 y 与 x 间的相关系数 r ，并利用 r 说明 y 与 x 是否具有较强的线性相关关系；
(若 $|r| > 0.75$ ，则线性相关程度很高)

(2) 从这 5 个地点中任抽 2 个地点，求抽到的这 2 个地点 A 型无人运输机指标数高于 B 型无人运输机指标数的个数 X 的分布列和期望。

18. (12 分)

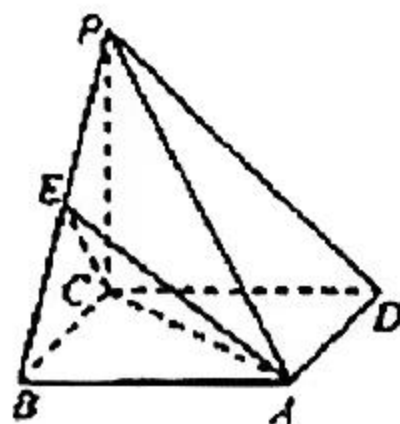
已知数列 $\{a_n\}$ 的前项和为 S_n ，且 $S_n - na_n = \frac{1}{2}n(n-1)$ 。

(1) 证明：数列 $\{a_n\}$ 为等差数列；

(2) 若 a_3, a_6, a_{11} 成等比数列，求 S_n 的最大值。

19. (12分)

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，已知底面 $ABCD$ 是正方形， E 是棱 PB 上一点.



(1) 若 $PD \parallel$ 平面 ACE ，证明： E 是 PB 的中点；

(2) 若 $PB = PD = \sqrt{2}$ ， $PC = BC = 1$ ，问线段 PB 上是否存在点 E ，使二面角 $P-AC-E$ 大小的余弦值是 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ？若存在，求 $\frac{PE}{EB}$ 的值；若不存在，请说明理由.

20. (12分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，上、下顶点分别为 A_1, A_2 ，四边形 $A_1F_1A_2F_2$ 的面积为 $2\sqrt{3}$ 且 $\angle F_1A_1F_2 = \frac{\pi}{3}$.

(1) 求椭圆 E 的方程；

(2) 过点 $A(1, 3)$ 的直线与椭圆 E 相交于两点 P, Q (P 在 Q 上方)，线段 PQ 上存在点 M 使得 $\frac{|AP|}{|AQ|} = \frac{|MP|}{|MQ|}$ ，求 $|MF_1| + |MF_2|$ 的最小值.

21. (12分)

已知函数 $f(x) = 1 + \frac{1}{x} + a \ln x$ ($a \in \mathbb{R}$)

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

(2) 若 $a > 0$ 时，函数 $f(x)$ 有唯一零点 x_1 ，设函数 $g(x) = x - \sin x - \frac{a}{e^x}$ 在 $\mathbb{R}$ 上的零点为 x_2 ，请探究 x_1 与 x_2 大小关系，并说明理由.

(二) 选考题：共 10 分。请考生在 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分。

22. 选修 4-4：坐标系与参数方程 (10 分)

在平面直角坐标系 xOy 中，以原点 O 为极点， x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，已知曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho^2 - 2\sqrt{2}\rho\sin\left(\theta + \frac{3\pi}{4}\right) - 8 = 0$ ，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\theta = \frac{\pi}{4}$ ， C_1 与 C_2 相交于 M 、 N 两点。

(1) 把 C_1 和 C_2 的极坐标方程化为直角坐标方程，并求点 M 、 N 的直角坐标；

(2) 若 P 为 C_1 上的动点，求 $|PM|^2 + |PN|^2$ 的取值范围。

23. 选修 4-5：不等式选讲 (10 分)

已知函数 $f(x) = |2x - 1| - |x + 1|$ 的最小值为 m 。

(1) 求实数 m 的值；

(2) 若实数 a, b, c 满足 $a - 2b + 2c = m + \frac{5}{2}$ ，证明： $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{9}$ 。