

雅安市高 2021 级第三次诊断性考试

数学(理科) 参考答案

一、选择题(本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分)

AACDA ABCDD BB

二、填空题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 15 14. -1 15. $\frac{4}{29}$ 16. 14

三、解答题(本大题共 6 小题, 共 70 分)

17. (1) $a_1 = 2, S_n = a_{n+1} - 2$ 当 $n=1$ 时, $a_1 = a_2 - 2, \therefore a_2 = 4, a_2 = 2a_1$,当 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1} = a_n - 2$, 两式相减得 $a_{n+1} = 2a_n (n \geq 2)$, $\therefore a_{n+1} = 2a_n (n \in \mathbb{N}^*)$, $\because a_1 = 2 \neq 0, \therefore \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2 (n \in \mathbb{N}^*)$. $\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项, 2 为公比的等比数列, $\therefore a_n = 2^n$ 6 分(2) 由 (1) 可知 $b_n = 1 + \log_2 a_n = 1 + n, \therefore a_n \cdot b_n = (1+n) \cdot 2^n$, $\therefore T_n = 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \cdots + (1+n) \cdot 2^n$, $2T_n = 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \cdots + (1+n) \cdot 2^{n+1}$,

两式相减得

$$-T_n = 4 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n - (1+n) \cdot 2^{n+1} = 4 + \frac{2^2(1-2^{n-1})}{1-2} - (1+n) \cdot 2^{n+1} = -n \cdot 2^{n+1}.$$

 $\therefore T_n = n \cdot 2^{n+1}$ 12 分18. (1) 补全的 2×2 列联表如下:

	年龄段 I	年龄段 II	合计
使用频率高	150	110	260
使用频率低	250	290	540
合计	400	400	800

..... 3 分

$$\text{所以 } K^2 = \frac{800(150 \times 290 - 110 \times 250)^2}{400 \times 400 \times 540 \times 260} \approx 9.117 > 6.635,$$

所以有 99% 的把握认为跑腿服务的使用频率高低与年龄有关.6 分

(2) 由数表知, 利用分层抽样的方法抽取的 8 人中, 年龄在 $[35, 45)$, $[45, 55]$ 内的人数分别为 5, 3, 依题意, ξ 的所有可能取值分别为 -2, 0, 2,

$$\text{所以 } P(\xi = -2) = P(X = 0, Y = 2) = \frac{C_3^2}{C_8^2} = \frac{3}{28},$$

$$P(\xi = 0) = P(X = 1, Y = 1) = \frac{C_3^1 C_5^1}{C_8^2} = \frac{15}{28},$$

$$P(\xi = 2) = P(X = 2, Y = 0) = \frac{C_5^2}{C_8^2} = \frac{10}{28},$$

所以 ξ 的分布列为:

	-2	0	2
P	$\frac{3}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{10}{28}$

$$\text{所以 } \xi \text{ 的数学期望为 } E(\xi) = -2 \times \frac{3}{28} + 0 \times \frac{15}{28} + 2 \times \frac{10}{28} = \frac{14}{28} = \frac{1}{2}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. (1) 证明: 因为 $AP = AC$, E 为线段 PC 的中点,
所以 $AE \perp PC$, 1 分

在等腰梯形 $ABCD$ 中, 作 $CF \perp AB$ 于 F , 则由 $AB = 2CD = 2BC = 2$ 得 $FB = \frac{1}{2}BC$,

$$\text{所以 } \cos \angle CBA = \frac{BF}{BC} = \frac{1}{2}, \text{ 所以 } \angle CBA = 60^\circ, \angle FCB = 30^\circ,$$

$$\text{因为 } AB = 2BC, \text{ 所以 } \frac{BC}{AB} = \frac{BF}{BC} = \frac{1}{2} \text{ 所以 } \triangle BCF \sim \triangle BAC, \text{ 所以}$$

$$\angle BCF = \angle BAC = 30^\circ,$$

$$\text{所以 } \angle ACB = 90^\circ, \text{ 所以 } AC \perp BC, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } PC \perp CB, PC \cap AC = C,$$

$$\text{所以 } BC \perp \text{平面 } PCA, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

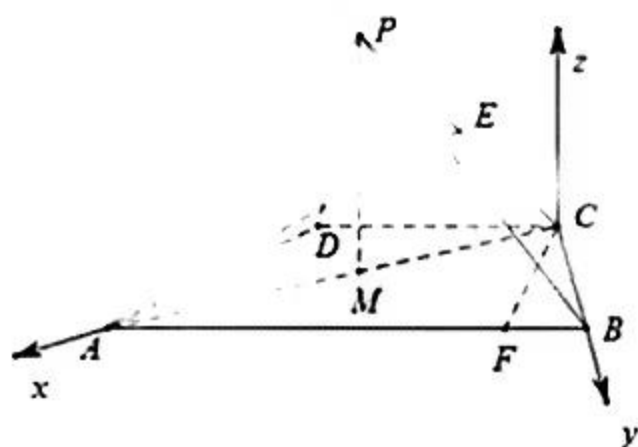
$$\text{因为 } AE \text{ 在平面 } PCA \text{ 内, 所以 } BC \perp AE, \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } PC \cap BC = C, PC, BC \text{ 在平面 } PCB \text{ 内, 所以 } AE \perp \text{平面 } PCB. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 解: 因为 } PB = 2, BC = 1, \text{ 所以 } PC = \sqrt{3}, AP = AC = \sqrt{3},$$

取 AC 的中点 M , 连接 PM , 则 $PM \perp AC$, 因为 $BC \perp$ 平面 PCA , 所以 $PM \perp BC$,
又 $BC \cap AC = C$ 所以 $PM \perp$ 平面 $ABCD$, 7 分

所以如图, 以 C 为原点, 以 CA 所在的直线为 x 轴, 以 CB 所在的直线为 y 轴, 建立空间直角坐标系, 8 分



则 $A(\sqrt{3}, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 0)$, $D(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$, $P(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{3}{2})$, $C(0, 0, 0)$,

$\vec{CD} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$, $\vec{CP} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{3}{2})$, 令平面 PCD 法向量 $\vec{m} = (x, y, z)$,

$$\begin{cases} \vec{CD} \cdot \vec{m} = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y = 0 \\ \vec{CP} \cdot \vec{m} = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{3}{2}z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \sqrt{3}x \\ z = -\frac{\sqrt{3}}{3}x \end{cases}$$

取 $\vec{m} = (\sqrt{3}, 3, -1)$,

由 (1) 知 $BC \perp$ 平面 PCA , 则平面 PCA 的法向量 $\vec{n} = (0, 1, 0)$,

设二面角 $A-PC-D$ 所成平面角为 θ , 则 $\cos \theta = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$,

所以二面角 $A-PC-D$ 的余弦值为 $\frac{3\sqrt{13}}{13}$ 12 分

20. (1) 由已知得 $2b = 2$, $\therefore b = 1$ 1 分

设 $M(2, y_0)$, 则 $\frac{k_{MF_2}}{k_{MF_1}} = \frac{y_0}{2-c} \cdot \frac{2+c}{y_0} = \frac{2+c}{2-c} = 3$, $\therefore c = 1$ 3 分

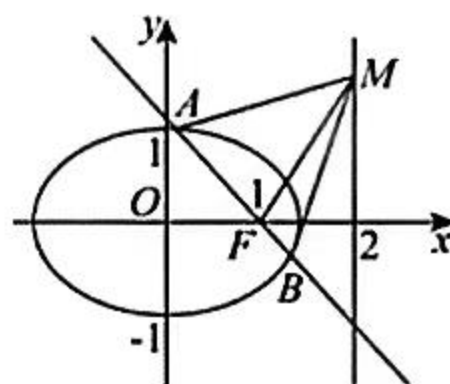
所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 4 分

(2) ①当直线 AB 的斜率为 0 时, AB 的方程: $y = 0$,

不妨设 $A(\sqrt{2}, 0)$, $B(-\sqrt{2}, 0)$, $M(2, t)$,

$$k_1 = \frac{t}{2-\sqrt{2}} = \frac{(2+\sqrt{2})t}{2}, \quad k_3 = \frac{t}{2+\sqrt{2}} = \frac{(2-\sqrt{2})t}{2}, \quad k_2 = t,$$

$$k_1 + k_3 = \frac{(2+\sqrt{2})t}{2} + \frac{(2-\sqrt{2})t}{2} = 2t,$$



所以 $k_1 + k_3 = 2k_2$; 5 分

②当直线 AB 的斜率不为 0 时, 如图, 设 AB 的方程: $x = my + 1$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$.

$$\text{由 } \begin{cases} \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \\ x = my + 1 \end{cases}, \text{ 得 } (m^2 + 2)y^2 + 2my - 1 = 0.$$

$$\text{则 } y_1 + y_2 = -\frac{2m}{m^2 + 2}, \quad y_1 y_2 = -\frac{1}{m^2 + 2}. \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} k_1 + k_3 &= \frac{y_1 - t}{x_1 - 2} + \frac{y_2 - t}{x_2 - 2} = \frac{y_1 - t}{my_1 + 1} + \frac{y_2 - t}{my_2 + 1} = \frac{(y_1 - t)(my_2 + 1) + (y_2 - t)(my_1 + 1)}{(my_1 + 1)(my_2 + 1)} \\ &= \frac{2my_1 y_2 - (mt + 1)(y_1 + y_2) + 2t}{m^2 y_1 y_2 - m(y_1 + y_2) + 1} = \frac{4t(m^2 + 1)}{2m^2 + 2} = 2t, \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分} \end{aligned}$$

又 $k_2 = t$, 所以 $k_1 + k_3 = 2k_2$ 11 分

综上, $k_1 + k_3 = 2k_2$. 所以 k_1, k_2, k_3 成等差数列. 12 分

$$21. (1) \text{ 当 } a=1 \text{ 时, } f(x) = e^x - x \cos x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$f'(x) = e^x - (\cos x - x \sin x) = e^x - \cos x + x \sin x,$$

$$\because x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \therefore e^x \geq e^0 = 1, \therefore e^x - \cos x \geq 0, \because x \sin x \geq 0, \therefore f'(x) \geq 0,$$

$$\therefore f(x) \text{ 在 } \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ 上单调递增, } \therefore f(x)_{\min} = f(0) = 1, f(x)_{\max} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}},$$

$$\therefore f(x) \text{ 的值域为 } \left[1, e^{\frac{\pi}{2}}\right]. \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2) 法一: 令 $h(x) = f(x) + g(x)$,

$$\text{①当 } a \leq 0 \text{ 时, } h(x) = e^x + \sin x - ax \cos x - 1 \geq \sin x - ax \cos x \geq 0 \text{ 在 } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ 上恒}$$

成立. 6 分

②当 $0 < a \leq 1$ 时,

$$h'(x) = e^x + \cos x + ax \sin x - a \cos x = e^x + ax \sin x + (1-a) \cos x > (1-a) \cos x \geq 0,$$

$\therefore h(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增, $\therefore h(x) \geq h(0) = 0$ 成立. 8 分

③当 $a > 2$ 时, $m(x) = h'(x) = e^x + \cos x + ax \sin x - a \cos x$,

$$m'(x) = e^x + (a-1) \sin x + a(\sin x + x \cos x) > 0,$$

$\therefore m(x)$ 在 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增, 即 $h'(x)$ 在 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增,

$$\therefore h'(0) = 2 - a < 0, h'\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{2}a > 0,$$

$\therefore$ 存在 $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 使得当 $x \in (0, x_0)$ 时 $h'(x) < 0$, 故 $h(x)$ 在 $x \in (0, x_0)$ 上单调递减,

则 $h(x_0) < h(0) = 0$, 不合题意. 10 分

④当 $1 < a \leq 2$ 时, 令 $m(x) = h'(x) = e^x + \cos x + ax \sin x - a \cos x$,

$$\text{则 } m'(x) = e^x + (a-1) \sin x + a(\sin x + x \cos x) > 0,$$

$\therefore m(x)$ 在 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增, 即 $h'(x)$ 在 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增,

$\therefore h'(x) \geq h'(0) = 2 - a \geq 0$, 即 $h(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增, $h(x) \geq h(0) = 0$ 成立.

综上, a 的取值范围是 $(-\infty, 2]$ 12 分

$$\text{法二: 令 } \varphi(x) = f(x) + g(x) \therefore \varphi(x) = e^x + \sin x - ax \cos x - 1,$$

$$\therefore \varphi'(x) = e^x + \cos x - a(\cos x - x \sin x) = e^x + \cos x - a \cos x + ax \sin x,$$

$$\text{令 } \varphi'(0) = 1 + 1 - a \geq 0 \text{ 得 } a \leq 2.$$

①当 $a \leq 2$ 时, $\varphi(x) \geq e^x + \sin x - 2x \cos x - 1$,

$$\text{令 } u(x) = e^x + \sin x - 2x \cos x - 1,$$

$$u'(x) = e^x + \cos x - 2(\cos x - x \sin x) = e^x + 2x \sin x - \cos x,$$

$$\therefore x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \therefore e^x - \cos x \geq 0 \therefore u'(x) \geq 0$$

$\therefore u(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增, $\therefore u(x) \geq 0$ 恒成立. 10 分

②当 $a > 2$ 时, $\therefore \varphi(x) < u(x)$, $\therefore u(0) = 0$,

$\therefore \exists x_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 使 $\varphi(x_0) < 0$, 这与 $\varphi(x) \geq 0$ 恒成立矛盾.

综上, $a \leq 2$ 12 分

22. (1) 曲线 C_1 是以 $C_1(4, 0)$ 为圆心的半圆,

所以半圆的极坐标方程为 $\rho = 8\cos\theta \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$,

曲线 C_2 以 $C_2\left(3, \frac{\pi}{2}\right)$ 为圆心的圆, 转换为极坐标方程为 $\rho = 6\sin\theta \left(0 \leq \theta \leq \pi\right)$.

故半圆 C_1 , 圆 C_2 的极坐标方程分别为: $\rho = 8\cos\theta \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$, $\rho = 6\sin\theta \left(0 \leq \theta \leq \pi\right)$ 5 分

(2) 由 (1) 得: $|MN| = |\rho_M - \rho_N| = 8\cos\alpha - 6\sin\alpha$.

点 C_1 到直线 MN 的距离 $d = |OC_1| \sin\alpha = 4\sin\alpha$.

所以 $S_{\triangle C_1MN} = \frac{1}{2} \times |MN| \cdot d = \frac{1}{2} \times (8\cos\alpha - 6\sin\alpha) \times 4\sin\alpha = 16\sin\alpha\cos\alpha - 12\sin^2\alpha$
 $= 10\sin(2\alpha + \varphi) - 6$

其中 $\tan\varphi = \frac{3}{4}$, 当 $\sin(2\alpha + \varphi) = 1$ 时, $\triangle C_1MN$ 的面积的最大值为 4. 10 分

23. (1) 当 $a = -1$ 时, 不等式为 $|x+1| + |x-3| \geq 2x$.

当 $x \leq -1$ 时, $|x+1| + |x-3| \geq 2x$ 可以化为 $-x-1+3-x \geq 2x$, 解得 $x \leq -1$;

当 $-1 < x < 3$ 时, $|x+1| + |x-3| \geq 2x$ 可以化为 $1+x+3-x \geq 2x$, 得 $-1 < x \leq 2$;

当 $x \geq 3$ 时, $|x+1| + |x-3| \geq 2x$ 可以化为 $x+1+x-3 \geq 2x$, 解得 $-2 \geq 0$, 不等式不成立;

综上, 可得不等式 $f(x) \geq 2x$ 的解集为 $(-\infty, 2]$ 5 分

(2) 当 $a = t (t > 0)$ 时, $f(x) = |x-t| + |x-3| \geq |(x-t) - (x-3)| = |3-t|$,

当 $(x-t)(x-3) \leq 0$ 时等号成立, 由 $|3-t| = 3$ 可得 $t = 0$ (舍) 或 $t = 6$, 故 $m+n=6$,

由柯西不等式可得

$36 = (m+n) \left(2^2 + (\sqrt{2})^2\right) \geq (2\sqrt{m} + \sqrt{2n})^2$, 即得 $2\sqrt{m} + \sqrt{2n} \leq 6$

当且仅当 $\frac{2}{\sqrt{m}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$ 时, 即 $m=4, n=2$ 时取等号. 10 分