

雅安市高2021级第三次诊断性考试

数学（理科）试题

（本试卷满分150分，答题时间120分钟）

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名，考号用0.5毫米的黑色墨水签字笔填写在答题卡上，并检查条形码粘贴是否正确。
2. 选择题使用2B铅笔填涂在答题卡对应题目标号的位置上；非选择题用0.5毫米黑色墨水签字笔书写在答题卡的对应框内，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸，试题卷上答题无效。
3. 考试结束后，将答题卡收回。

一、选择题（本大题共12小题，每小题5分，共60分）在每小题给出的四个选项中，只有一个符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | y = \ln x + 1\}$ ，集合 $B = \{x | x \leq \frac{1}{2}\}$ ，则 $A \cap B =$

- A. $(0, \frac{1}{2}]$ B. $(\frac{1}{2}, e)$ C. $(e, +\infty)$ D. $(0, \frac{1}{2})$

2. 已知复数 $z = \frac{7+5i}{1+i}$ ，则 $\bar{z} =$

- A. $6+i$ B. $6-i$ C. $1+6i$ D. $1-6i$

3. 已知平面向量 $\vec{a} = (0, 1)$ ， $\vec{b} = (1, -1)$ ，则向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 方向上的投影是

- A. -1 B. 1 C. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

4. 已知右图中程序框图的输出结果为1275，则判断框里可填

- A. $n < 51?$ B. $n < 50?$ C. $n > 51?$ D. $n > 50?$

5. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_2 + a_6 = 10$ ， $a_5 = 9$ ，则 $a_8 =$

- A. 21 B. 24 C. 27 D. 29

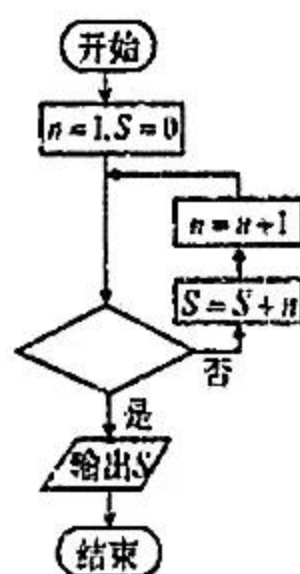
6. 二维码与我们的生活息息相关，我们使用的二维码主要是

21×21大小的，即441个点。根据0和1的二进制编码规则，一共有 2^{441} 种不同的码，假设我们1万年用掉 3×10^{15} 个二维码，那么所有二维码大约可以用（参考数据： $\lg 2 \approx 0.301$ ， $\lg 3 \approx 0.477$ ）

- A. 10^{117} 万年 B. 10^{120} 万年 C. 10^{123} 万年 D. 10^{125} 万年

7. 直线 $y = 3x + a$ 与曲线 $y = \sin 3x$ 相切的一个充分不必要条件为

- A. $a = 1$ B. $a = -2\pi$ C. $a = \pi$ D. $a = \frac{4\pi}{3}$

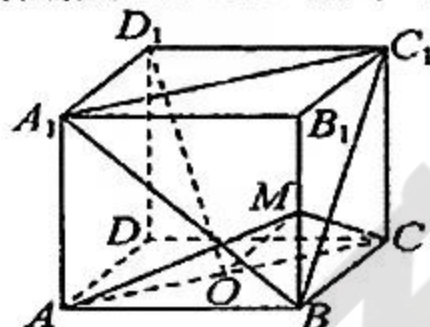


8. 从 0, 1, 2, 3, 4 五个数字组成的没有重复数字的四位数中任取一个数, 则该数为偶数的概率为

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{5}{9}$ C. $\frac{5}{8}$ D. $\frac{1}{3}$

9. 如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 已知点 O 为底面 $ABCD$ 的中心, M 为棱 BB_1 的中点, 则下列结论中错误的是

- A. $D_1O \parallel$ 平面 A_1BC_1
 B. $MO \perp$ 平面 A_1BC_1
 C. 异面直线 BC_1 与 AC 所成的角等于 60°
 D. 直线 OM 与平面 $ABCD$ 所成的角等于 45°



10. 在平面直角坐标系 xOy 中, 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的离

心率分别为 e_1, e_2 , 其中 $a > b > 0$ 且双曲线渐近线的斜率绝对值小于 $\frac{1}{2}$, 则下列关系中正确的是

- A. $e_1^2 + e_2^2 = 3$ B. $1 < e_2 < 2$ C. $\frac{1}{2} < e_1 < 1$ D. $\frac{\sqrt{15}}{4} < e_1 e_2 < 1$

11. 已知函数 $f(x) = \sin \omega x + \sqrt{3} \cos \omega x (\omega > 0)$, 则下列说法中正确的个数是

- ① 当 $\omega = 2$ 时, 函数 $y = f(x) - 2 \log_{\pi} x$ 有且只有一个零点;
 ② 当 $\omega = 2$ 时, 函数 $y = f(x + \varphi)$ 为奇函数, 则正数 φ 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$;
 ③ 若函数 $y = f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{3})$ 上单调递增, 则 ω 的最小值为 $\frac{1}{2}$;
 ④ 若函数 $y = f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上恰有两个极值点, 则 ω 的取值范围为 $(\frac{13}{6}, \frac{25}{6}]$.

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

12. 若抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点为 F , 直线 $y = 3$ 与抛物线 C 交于 M, N 两点, $|MF| = 4$, 圆 E 为 $\triangle MFN$ 的外接圆, 直线 OP 与圆 E 相切于点 P , 点 Q 为圆 E 上任意一点, 则 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ 的取值范围是

- A. $[-\frac{63}{25}, 9]$ B. $[-3, 21]$ C. $[\frac{63}{25}, 21]$ D. $[3, 9]$

二、填空题(本大题共4小题, 每小题5分, 共20分)将答案填写在答题卡相应的横线上.

13. 已知点 $P(x, y)$ 的坐标满足条件 $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq x \\ x - 2y + 3 \geq 0 \end{cases}$, 则 $3x + 2y$ 的最大值为_____.

14. 已知函数 $f(x) = \left(e^x - \frac{a}{e^x}\right) \cos 2x$ 是偶函数, 则实数 $a =$ _____.

15. 已知在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB \perp BC$, $\tan \angle BAC = \frac{3}{4}$, 且此三棱柱有内切球, 则此三棱柱的内切球与外接球的表面积之比为 _____.

16. 已知四边形 $ABCD$ 中, $AB = BC = CD = 2$, $DA = 2\sqrt{3}$, 设 $\triangle ABD$ 与 $\triangle BCD$ 的面积分别为 S_1 , S_2 , 则 $S_1^2 + S_2^2$ 的最大值为 _____.

三、解答题(本大题共6小题, 共70分) 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (12分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = 2$, $S_n = a_{n+1} - 2$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 令 $b_n = 1 + \log_2 a_n$, 求数列 $\{a_n \cdot b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (12分) 同城配送是随即时物流发展而出现的非标准化服务, 省时省力是消费者使用同城配送服务的主要目的. 某同城配送服务公司随机统计了800名不同年龄消费者每月的同城配送服务使用频率, 得到如下频数分布表:

	[15, 25)	[25, 35)	[35, 45)	[45, 55]
每月1次	50	40	40	90
每月2 ~ 4次	80	80	100	60
每月5 ~ 10次	60	75	56	47
每月10次以上	10	5	4	3

(1) 若年龄在 $[15, 35)$ 内的人位于年龄段 I, 年龄在 $[35, 55]$ 内的人位于年龄段 II, 每月使用同城配送服务低于5次的为使用频率低, 不低于5次的为使用频率高, 补全下面的 2×2 列联表, 并判断是否有99%的把握认为同城配送服务的使用频率高低与年龄段有关?

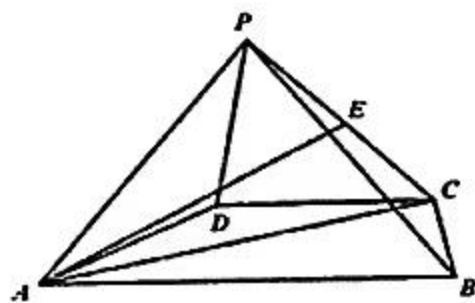
	年龄段 I	年龄段 II	合计
使用频率高			
使用频率低			
合计			

(2) 从样本中每月使用同城配送服务2 ~ 4次且年龄在 $[35, 55]$ 内的消费者中按照年龄段利用分层抽样的方法抽取8人, 再从这8人中随机抽取2人, 记这2人中年龄在 $[35, 45)$ 与 $[45, 55]$ 内的人数分别为 X , Y , 若 $\xi = X - Y$, 求 ξ 的分布列与数学期望.

参考公式: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n = a + b + c + d$. 附:

$P(K^2 \geq k_0)$	0.050	0.010	0.001
	3.841	6.635	10.828

19. (12分) 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AP=AC$, 底面 $ABCD$ 为等腰梯形, $CD \parallel AB$, $AB=2CD=2BC=2$, E 为线段 PC 的中点, $PC \perp CB$.



(1) 证明: $AE \perp$ 平面 PCB ;

(2) 若 $PB=2$, 求二面角 $A-PC-D$ 的余弦值.

20. (12分) 设 F_1, F_2 分别为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右焦点, 椭圆的短轴长为 2, M 是直线 $x=2$ 上除 $(2,0)$ 外的任意一点, 且直线 MF_2 的斜率与直线 MF_1 的斜率之比为 3.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 过右焦点 F_2 的直线 l 交椭圆于 A, B 两点, 设直线 MA, MF_2, MB 的斜率分别为 k_1, k_2, k_3 , 判断 k_1, k_2, k_3 是否成等差数列? 并说明理由.

21. (12分) 已知函数 $f(x) = e^x - ax \cos x, g(x) = \sin x - 1$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求函数 $f(x)$ 在 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的值域;

(2) 若关于 x 的不等式 $f(x) + g(x) \geq 0$ 在 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上恒成立, 求实数 a 的取值范围.

选做题: 请考生在 22、23 两题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一个题目计分, 作答时, 请用 2B 铅笔在答题卡上将所选题号后的方框涂黑.

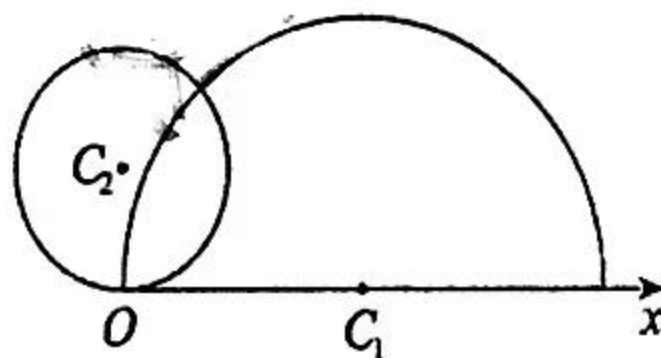
22. (10 分) [选修 4-4: 坐标系与参数方程]

如图, 在极坐标系中, 曲线 C_1 是以 $C_1(4,0)$ 为圆心的半圆, 曲线 C_2 是以

$C_2\left(3, \frac{\pi}{2}\right)$ 为圆心的圆, 曲线 C_1, C_2 都过极点 O .

(1) 分别写出曲线 C_1 , 曲线 C_2 的极坐标方程;

(2) 射线 $l: \theta = \alpha \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{4}\right)$ 与曲线 C_1, C_2 分别交于



M, N 两点 (异于极点 O), 求 $\triangle C_1MN$ 面积的最大值.

23. (10分) [选修 4-5: 不等式选讲]

已知 $f(x) = |x-a| + |x-3| (a \in \mathbb{R})$.

(1) 若 $a=-1$, 解不等式 $f(x) \geq 2x$;

(2) 当 $a=t (t>0)$ 时, $f(x)$ 的最小值为 3, 若正数 m, n 满足 $m+n=t$,

证明: $2\sqrt{m} + \sqrt{2n} \leq 6$.