

雅安市高 2021 级第三次诊断性考试

数学（文科）参考答案

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分）

BDDDA CCBCA BD

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 4 14. 15 15. 3 16. $\frac{4}{29}$

三、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分）

17. (1) $\because b = a \cos C + \frac{1}{2}c,$

由正弦定理得 $\sin B = \sin A \cos C + \frac{1}{2} \sin C = \sin(A+C) = \sin A \cos C + \cos A \sin C,$

$\therefore \frac{1}{2} \sin C = \cos A \sin C. \because \sin C \neq 0,$

$\therefore \cos A = \frac{1}{2}, \therefore A \approx \frac{\pi}{3} \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

(2) 由已知得 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = bc \cos A = 3, \text{ 故 } bc = 6.$

由余弦定理得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = b^2 + c^2 - bc \geq 2bc - bc = bc = 6,$

当且仅当 $b = c = \sqrt{6}$ 时, a 有最小值 $\sqrt{6} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

18. (1) 每月使用跑腿服务不低于 5 次的消费者年龄的平均数为

$20 \times 0.028 \times 10 + 30 \times 0.030 \times 10 + 40 \times 0.022 \times 10 + 50 \times 0.020 \times 10 = 33.4,$

设每月使用同城配送服务不低于 5 的消费者年龄的中位数为 a .

则 $0.028 \times 10 + (a - 25) \times 0.030 = 0.5$, 解得 $a \approx 32.3 \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

(2) 补全的 2×2 列联表如下:

	年龄段 I	年龄段 II	合计
使用同城配送服务频率高	145	105	250
使用同城配送服务频率低	255	295	550
合计	400	400	800

所以 $K^2 = \frac{800(145 \times 295 - 105 \times 255)^2}{400 \times 400 \times 550 \times 250} \approx 9.309 > 6.635.$

所以, 有 99% 的把握认为同城配送服务的使用频率高低与年龄段有关. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

19. (1) 证明: 因为 $AP = AC$, E 为线段 PC 的中点,

所以 $AE \perp PC$, $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

在等腰梯形 $ABCD$ 中, 作 $CF \perp AB$ 于 F , 则由 $AB = 2CD = 2BC = 2$ 得 $FB = \frac{1}{2}BC$,

所以 $\cos \angle CBA = \frac{BF}{BC} = \frac{1}{2}$, 所以 $\angle CBA = 60^\circ$, $\angle FCB = 30^\circ$,

因为 $AB = 2BC$, 所以 $\frac{BC}{AB} = \frac{BF}{BC} = \frac{1}{2}$ 所以 $\triangle BCF \sim \triangle BAC$, 所以

$\angle BCF = \angle BAC = 30^\circ$,

所以 $\angle ACB = 90^\circ$, 所以 $AC \perp BC$, 3 分

因为 $PC \perp CB$, $PC \cap AC = C$,

所以 $BC \perp$ 平面 PCA , 4 分

因为 AE 在平面 PCA 内, 所以 $BC \perp AE$, 5 分

因为 $PC \cap BC = C$, PC, BC 在平面 PCB 内, 所以 $AE \perp$ 平面 PCB 6 分

(2) 因为 $PB = 2$, $BC = 1$, 所以 $PC = \sqrt{3}$, $AP = AC = \sqrt{3}$,

取 AC 的中点 M , 连接 PM , 则 $PM \perp AC$, 因为 $BC \perp$ 平面 PCA , 所以 $PM \perp BC$,

又 $BC \cap AC = C$ 所以 $PM \perp$ 平面 $ABCD$, 7 分

$\therefore \angle PDM$ 为直线 PD 与平面 $ABCD$ 所成的角,

在正 $\triangle PAC$ 中, $PM = \frac{3}{2}$, 又因为 $DM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}$,

在 $Rt\triangle PDM$ 中, $PD^2 = PM^2 + DM^2 = \frac{9}{4} + \frac{1}{4} = \frac{10}{4}$, $PD = \frac{\sqrt{10}}{2}$,

$$\therefore \sin \angle PDM = \frac{PM}{PD} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{10}}{2}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

$\therefore$ 直线 PD 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值为 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ 12 分

20. (1) 由已知得 $2b = 2$, $\therefore b = 1$ 1 分

设 $M(2, y_0)$, 则 $\frac{k_{MF_2}}{k_{MF_1}} = \frac{y_0}{2-c} \cdot \frac{2+c}{y_0} = \frac{2+c}{2-c} = 3$, $\therefore c = 1$ 3 分

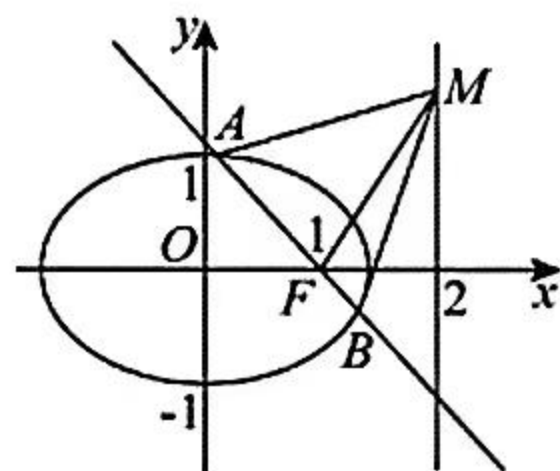
所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 4 分

(2) ①当直线 AB 的斜率为 0 时, AB 的方程: $y = 0$,

不妨设 $A(\sqrt{2}, 0)$, $B(-\sqrt{2}, 0)$, $M(2, t)$,

$$k_1 = \frac{t}{2-\sqrt{2}} = \frac{(2+\sqrt{2})t}{2}, \quad k_3 = \frac{t}{2+\sqrt{2}} = \frac{(2-\sqrt{2})t}{2}, \quad k_2 = t,$$

$$k_1 + k_3 = \frac{(2+\sqrt{2})t}{2} + \frac{(2-\sqrt{2})t}{2} = 2t,$$



所以 $k_1 + k_3 = 2k_2$; 5 分

②当直线 AB 的斜率不为 0 时, 如图, 设 AB 的方程: $x = my + 1$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$.

$$\text{由} \begin{cases} \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \\ x = my + 1 \end{cases}, \text{得} (m^2 + 2)y^2 + 2my - 1 = 0.$$

$$\text{则} y_1 + y_2 = -\frac{2m}{m^2 + 2}, y_1 y_2 = -\frac{1}{m^2 + 2}. \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} k_1 + k_3 &= \frac{y_1 - t}{x_1 - 2} + \frac{y_2 - t}{x_2 - 2} = \frac{y_1 - t}{my_1 - 1} + \frac{y_2 - t}{my_2 - 1} = \frac{(y_1 - t)(my_2 - 1) + (y_2 - t)(my_1 - 1)}{(my_1 - 1)(my_2 - 1)} \\ &= \frac{2my_1 y_2 - (mt + 1)(y_1 + y_2) + 2t}{m^2 y_1 y_2 - m(y_1 + y_2) + 1} = \frac{4t(m^2 + 1)}{2m^2 + 2} = 2t, \dots\dots\dots 10 \text{ 分} \end{aligned}$$

$$\text{又} k_2 = t, \text{所以} k_1 + k_3 = 2k_2. \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

综上, $k_1 + k_3 = 2k_2$. 所以 k_1, k_2, k_3 成等差数列. 12 分

21. (1)依题意, $f'(x) = a - 1 + 2\cos x$,

令 $f'(x) = 0$, 得 $a = 1 + 2\cos x$,

因为 $1 + 2\cos x \in [-1, 3]$,

所以当 $a \leq -1$ 时, $f'(x) \leq 0$, $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递减;

当 $a \geq 3$ 时, $f'(x) \geq 0$,

故 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增;

当 $-1 < a < 3$ 时, $f'(x) = 0$ 有解,

综上, $a \in (-1, 3)$ 4 分

(2) 依题意, 由 $f(x) + x(1 + \cos x) \leq 0$,

得 $(a - 1)x - 2\sin x + x(1 + \cos x) \leq 0$,

即 $2\sin x - x\cos x - ax \geq 0$, 6 分

设 $h(x) = 2\sin x - x\cos x - ax$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

则 $h'(x) = 2\cos x - \cos x + x\sin x - a = \cos x + x\sin x - a$

设 $m(x) = \cos x + x\sin x - a$, 则 $m'(x) = x\cos x$,

当 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时, $m'(x) > 0$, $m(x)$ 单调递增;

所以在 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 上, $h'(x) \leq h'(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - a$, 且 $h'(0) = 1 - a$,

当 $\frac{\pi}{2} - a \leq 0$, 即 $a \geq \frac{\pi}{2}$ 时, $h'(x) \geq 0$, $h(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上单调递增, $h(x) \leq h(0)$, 不符合

题意, 舍去, 8 分

②当 $\frac{\pi}{2} - a > 0$, 即 $a < \frac{\pi}{2}$ 时,

(I) 若 $1 - a < 0$, 即 $1 < a < \frac{\pi}{2}$,

$\exists x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$, 使得 $h'(x_0) = 0$, 当 $0 < x < x_0$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 在 $(0, x_0)$ 内单调递减,

$h(x) \leq h(0) = 0$, 不符合题意, 舍去, 10 分

(II) 若 $1 - a \geq 0$, 即 $a \leq 1$, $h'(x) > 0$ 恒成立,

$h(x)$ 在 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递增, 则 $h(x) \geq h(0) = 0$, 符合题意.

综上, 实数 a 的取值范围为 $(-\infty, 1]$ 12 分

22. (1) 曲线 C_1 是以 $C_1(4, 0)$ 为圆心的半圆,

所以半圆的极坐标方程为 $\rho = 8\cos\theta \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$,

曲线 C_2 以 $C_2\left(3, \frac{\pi}{2}\right)$ 为圆心的圆, 转换为极坐标方程为 $\rho = 6\sin\theta \left(0 \leq \theta \leq \pi\right)$.

故半圆 C_1 , 圆 C_2 的极坐标方程分别为: $\rho = 8\cos\theta \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$, $\rho = 6\sin\theta \left(0 \leq \theta \leq \pi\right)$ 5 分

(2) 由 (1) 得: $|MM'| = |\rho_M - \rho_N| = 8\cos\alpha - 6\sin\alpha$.

点 C_1 到直线 MM' 的距离 $d = |OC_1| \sin\alpha = 4\sin\alpha$.

所以 $S_{\triangle C_1MM'} = \frac{1}{2} \times |MM'| \cdot d = \frac{1}{2} \times (8\cos\alpha - 6\sin\alpha) \times 4\sin\alpha = 16\sin\alpha\cos\alpha - 12\sin^2\alpha$
 $= 10\sin(2\alpha + \varphi) - 6$

其中 $\tan\varphi = \frac{3}{4}$, 当 $\sin(2\alpha + \varphi) = 1$ 时, $\triangle C_1MM'$ 面积的最大值为 4. 10 分

23. (1) 当 $a = -1$ 时, 不等式为 $|x+1| + |x-3| \geq 2x$,

当 $x \leq -1$ 时, $|x+1| + |x-3| \geq 2x$ 可以化为 $-x-1+3-x \geq 2x$, 解得 $x \leq -1$;

当 $-1 < x < 3$ 时, $|x+1| + |x-3| \geq 2x$ 可以化为 $1+x+3-x \geq 2x$, 解得 $-1 < x \leq 2$;

当 $x \geq 3$ 时, $|x+1| + |x-3| \geq 2x$ 可以化为 $x+1+x-3 \geq 2x$, 解得 $-2 \geq 0$, 不等式不成立;

综上, 可得不等式 $f(x) \geq 2x$ 的解集为 $(-\infty, 2]$ 5 分

(2) 当 $a = t (t > 0)$ 时, $f(x) = |x-t| + |x-3| \geq |(x-t) - (x-3)| = |3-t|$,

当 $(x-t)(x-3) \leq 0$ 时等号成立, 由 $|3-t| = 3$ 可得 $t = 0$ (舍) 或 $t = 6$, 故 $m+n=6$,

由柯西不等式可得

$36 = (m+n) \left(2^2 + (\sqrt{2})^2 \right) \geq (2\sqrt{m} + \sqrt{2n})^2$, 即得 $2\sqrt{m} + \sqrt{2n} \leq 6$

当且仅当 $\frac{2}{\sqrt{m}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$ 时, 即 $m=4, n=2$ 时取等号. 10 分