

雅安市高2021级第三次诊断性考试

数学（文科）试题

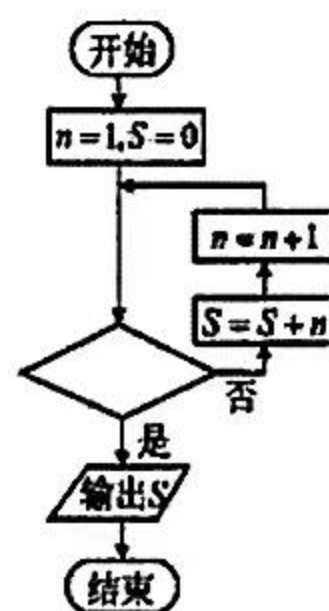
（本试卷满分150分，答题时间120分钟）

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名，考号用0.5毫米的黑色墨水签字笔填写在答题卡上，并检查条形码粘贴是否正确。
2. 选择题使用2B铅笔填涂在答题卡对应题目标号的位置上；非选择题用0.5毫米黑色墨水签字笔书写在答题卡的对应框内，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸，试题卷上答题无效。
3. 考试结束后，将答题卡收回。

一、选择题（本大题共12小题，每小题5分，共60分）在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的。

1. 已知全集 $U = \{-2, 2, 4, 6\}$ ，集合 $A = \{-2, 2, 4\}$ ，集合 $B = \{2, 4, 6\}$ ，则 $\complement_U(A \cap B) =$
 A. $\{2, 4\}$ B. $\{-2, 6\}$ C. $\{2\}$ D. $\{6\}$
2. 已知复数 $z = (3-i)(1+i)$ ，则 $|z| =$
 A. 3 B. 2 C. $3\sqrt{5}$ D. $2\sqrt{5}$
3. 已知平面向量 $\vec{a} = (0, 1)$ ， $\vec{b} = (1, -1)$ ，则向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 方向上的投影是
 A. 1 B. -1 C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
4. 从1，2，3三个数字组成的没有重复数字的三位数中任取一个数，则该数为偶数的概率为
 A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{5}{9}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{3}$
5. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_2 + a_6 = 10$ ， $a_5 = 9$ ，则 $a_8 =$
 A. 21 B. 24 C. 27 D. 29
6. 已知右图中程序框图的输出结果为1275，则判断框里可填
 A. $n < 51?$ B. $n < 50?$ C. $n > 50?$ D. $n > 51?$
7. 已知过圆锥曲线的焦点且与焦点所在的对称轴垂直的弦被称为该圆锥曲线的通径，清代数学家明安图在《割圆密率捷法》中，也称圆的直径为通径. 已知圆 $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$ 的一条通径与抛物线 $x^2 = 2py$ ($p > 0$) 的通径恰好构成一个正方形的一组邻边，则 $p =$



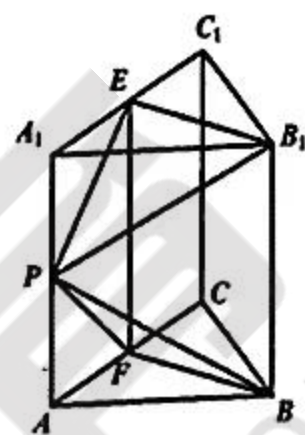
- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. 2 D. 4

8. 已知函数 $f(x) = \left(e^x - \frac{a}{e^x}\right) \cos 2x$ 是偶函数, 则实数 $a =$

- A. 1 B. -1 C. 2 D. -2

9. 如右图, 在各棱长均为 2 的正三棱柱 ($ABC-A_1B_1C_1$ 中, P, E, F 分别是 AA_1, A_1C_1, AC 的中点, 则四棱锥 $P-EFBB_1$ 的体积为

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$



10. 设 F_1, F_2 分别为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左右焦点, 过点 F_2 的直线交双曲线右支于点 M , 交 y 轴于点 N , 且 F_2 为线段 MN 的中点, 并满足 $\overline{F_1M} \perp \overline{F_1N}$, 则双曲线 C 的离心率为

- A. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ B. $\sqrt{3}+1$ C. 2 D. $\sqrt{5}+1$

11. 已知函数 $f(x) = \sin \omega x + \sqrt{3} \cos \omega x (\omega > 0)$, 则下列说法中正确的个数是

- ① 当 $\omega = 2$ 时, 函数 $y = f(x) - 2 \log_{\pi} x$ 有且只有一个零点;
 ② 当 $\omega = 2$ 时, 函数 $y = f(x + \varphi)$ 为奇函数, 则正数 φ 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$;
 ③ 若函数 $y = f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{3})$ 上单调递增, 则 ω 的最小值为 $\frac{1}{2}$;
 ④ 若函数 $y = f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上恰有两个极值点, 则 ω 的取值范围为 $(\frac{13}{6}, \frac{25}{6}]$.

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

12. 已知函数 $f(x) = x^2 - 2 - \ln x$, $a = f(\ln \sqrt{2})$, $b = f(\frac{\ln 3}{3})$, $c = f(\frac{1}{e})$, 则

- A. $a < c < b$ B. $b < c < a$ C. $c < a < b$ D. $c < b < a$

二、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分) 将答案填写在答题卡相应的横线上.

13. 等比数列 $\{a_n\}$ 中, 每项均为正数, 且 $a_4 \cdot a_5 = 81$, 则 $\log_3 a_1 + \log_3 a_8 =$ ____.

14. 已知点 $P(x, y)$ 的坐标满足条件 $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq x \\ x - 2y + 3 \geq 0 \end{cases}$, 则 $3x + 2y$ 的最大值为 ____.

15. 已知 $f(x)$ 是奇函数，且当 $x < 0$ 时， $f(x) = -e^{ax}$ ，若 $f(\ln 2) = \frac{1}{8}$ ，则实数 $a =$ _____.

16. 已知在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $AB \perp BC$ ， $\tan \angle BAC = \frac{3}{4}$ ，且此三棱柱有内切球，则此三棱柱的内切球与外接球的表面积之比为_____.

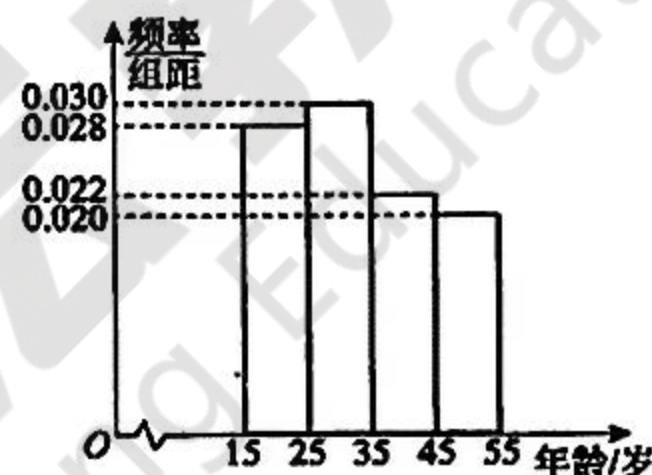
三、解答题(本大题共6小题，共70分)解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (12分) 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，且 $b = a \cos C + \frac{1}{2}c$.

(1) 求角 A ;

(2) 若 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3$ ，求 a 的最小值.

18. (12分) 同城配送是随即时物流发展而出现的非标准化服务，省时省力是消费者使用同城配送服务的主要目的. 某同城配送服务公司随机统计了800名消费者的年龄(单位：岁)以及每月使用同城配送服务的次数，得到每月使用同城服务低于5次的有550人，并将每月使用同城配送服务次数不低于5次的消费者按照年龄 $[15, 25)$ ， $[25, 35)$ ， $[35, 45)$ ， $[45, 55]$ 进行分组，得到如图所示的频率分布直方图.



(1) 估计每月使用同城配送服务不低于5次的消费者年龄的平均值和中位数(结果精确到0.1，每组数据用该组区间的中点值代表)；

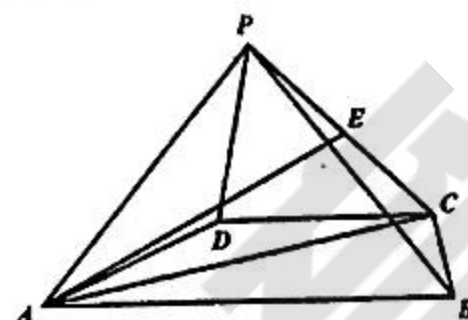
(2) 若年龄在 $[15, 35)$ 内的人位于年龄段 I，年龄在 $[35, 55]$ 内的人位于年龄段 II，把每月使用同城配送服务低于5次的消费者称为“使用同城配送服务频率低”，否则称为“使用同城配送服务频率高”，若800名消费者中有400名在年龄段 I，补全 2×2 列联表，并判断是否有99%的把握认为消费者使用同城配送服务频率的高低与年龄段有关？

	年龄段 I	年龄段 II	合计
使用同城配送服务频率高			
使用同城配送服务频率低			
合计			

参考公式: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n = a+b+c+d$. 附:

$P(K^2 \geq k_0)$	0.050	0.010	0.001
k_0	3.841	6.635	10.828

19. (12分) 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AP = AC$, 底面 $ABCD$ 为等腰梯形, $CD \parallel AB$, $AB = 2CD = 2BC = 2$, E 为线段 PC 的中点, $PC \perp CB$.



(1) 证明: $AE \perp$ 平面 PCB ;

(2) 若 $PB = 2$, 求直线 PD 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值.

20. (12分) 设 F_1, F_2 为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右焦点, 椭圆的短轴长为 2, M 是直线 $x = 2$ 上除 $(2, 0)$ 外的任意一点, 且直线 MF_2 的斜率与直线 MF_1 的斜率之比为 3.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 过右焦点 F_2 的直线 l 交椭圆于 A, B 两点, 设直线 MA, MF_2, MB 的斜率分别为 k_1, k_2, k_3 , 判断 k_1, k_2, k_3 是否成等差数列? 并说明理由.

21. (12分) 已知函数 $f(x) = (a-1)x - 2\sin x$.

(1) 若函数 $f(x)$ 有极值, 求实数 a 的取值范围;

(2) 若关于 x 的不等式 $f(x) + x(1 + \cos x) \leq 0$ 在 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 上恒成立, 求实数 a

的取值范围.

选做题: 请考生在 22、23 两题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一个题目计分, 作答时, 请用 2B 铅笔在答题卡上将所选题号后的方框涂黑.

22. (10 分) [选修 4-4: 坐标系与参数方程]

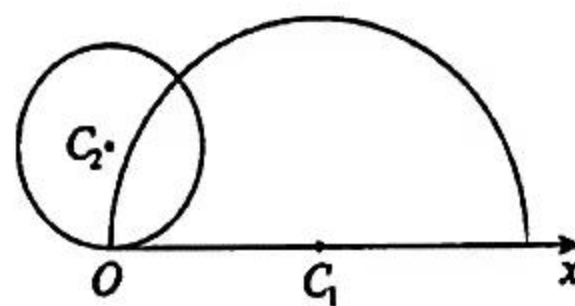
如图, 在极坐标系中, 曲线 C_1 是以 $C_1(4, 0)$ 为圆心的半圆, 曲线 C_2 是以

$C_2(3, \frac{\pi}{2})$ 为圆心的圆, 曲线 C_1, C_2 都过极点 O .

(1) 分别写出曲线 C_1 , 曲线 C_2 的极坐标方程;

(2) 射线 $l: \theta = \alpha (0 < \alpha < \frac{\pi}{4})$ 与曲线 C_1, C_2 分别交于

M, N 两点 (异于极点 O), 求 $\triangle C_1MN$ 面积的最大值.



23. (10分) [选修 4-5: 不等式选讲]

已知 $f(x) = |x-a| + |x-3| (a \in \mathbb{R})$.

(1) 若 $a = -1$, 解不等式 $f(x) \geq 2x$;

(2) 当 $a = t (t > 0)$ 时, $f(x)$ 的最小值为 3, 若正数 m, n 满足 $m + n = t$, 证明:

$2\sqrt{m} + \sqrt{2n} \leq 6$.