

秘密 ★ 启用前

眉山市高中 2024 届第三次诊断性考试

数 学 (理科)

本试卷满分 150 分,考试时间 120 分钟。

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、座位号和准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

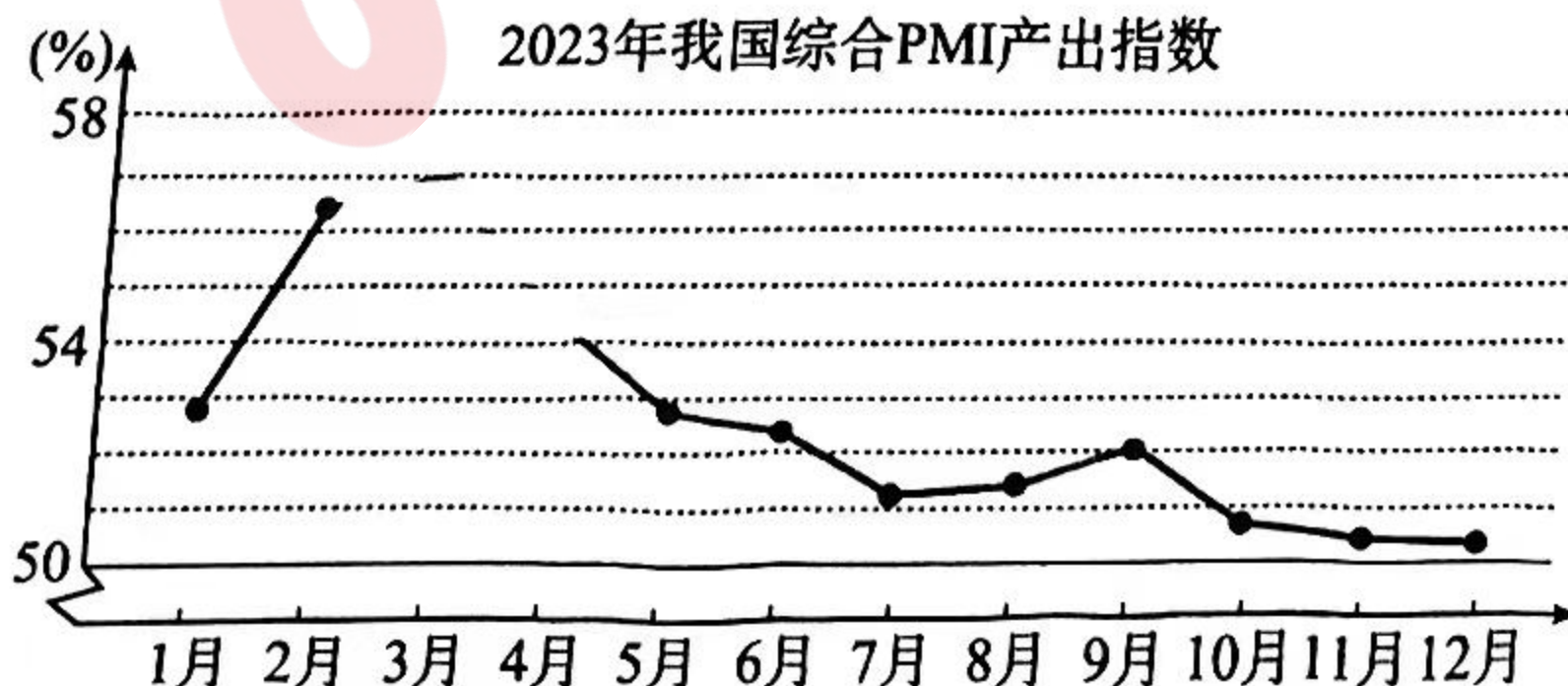
1. 在复平面内, $\frac{1+2i}{1-i}$ 对应的点位于

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

2. 设全集 $U = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, 集合 $A = \{-2, -1, 0, 1\}$, $B = \{-1, 1, 3\}$, 则 $\{-3, 2\} =$

- A. $(\complement_U A) \cap B$ B. $(\complement_U A) \cup B$ C. $\complement_U (A \cap B)$ D. $\complement_U (A \cup B)$

3. 采购经理指数(PMI), 是国际上通用的监测宏观经济走势的先行性指数之一, 具有较强的预测、预警作用. 综合 PMI 产出指数是 PMI 指标体系中反映当期全行业(制造业和非制造业)产出变化情况的综合指数, 指数高于 50% 时, 反映企业生产经营活动较上月扩张; 低于 50%, 则反映企业生产经营活动较上月收缩. 2023 年我国综合 PMI 产出指数折线图如下图所示:



根据该折线图判断,下列结论正确的是

- A. 2023 年各月综合 PMI 产出指数的中位数高于 53%
 B. 2023 年各月,我国企业生产经营活动景气水平持续扩张
 C. 2023 年第 3 月至 12 月,我国企业生产经营活动景气水平持续收缩
 D. 2023 年上半年各月综合 PMI 产出指数的方差小于下半年各月综合 PMI 产出指数的方差

4. 已知向量 a, b, c 满足 $|a| = |b| = 1, |c| = \sqrt{3}$, 且 $a + b + c = 0$, 则 $\cos \langle a - c, b - c \rangle =$

- A. $\frac{13}{14}$ B. $\frac{3\sqrt{3}}{14}$ C. $-\frac{3\sqrt{3}}{14}$ D. $-\frac{13}{14}$

5. $(1-2x)(1+x)^5$ 的展开式中 x^3 的系数为

- A. 20 B. 10 C. -10 D. -20

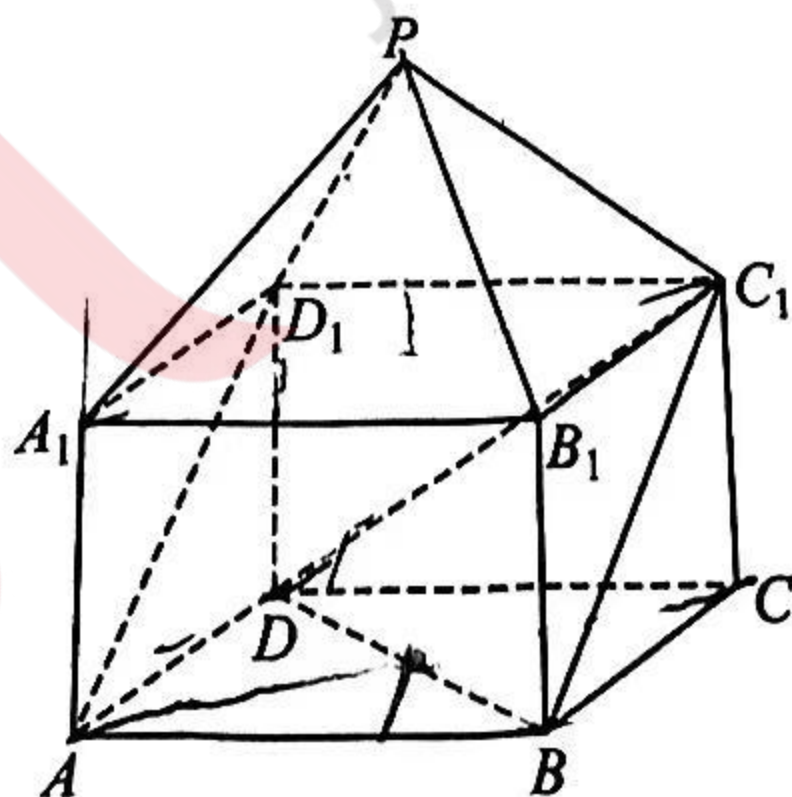
6. 已知 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\cos(\alpha + \frac{\pi}{3}) = -\frac{5}{13}$, 则 $\sin \alpha =$

- A. $\frac{12+5\sqrt{3}}{26}$ B. $\frac{12-5\sqrt{3}}{26}$ C. $\frac{12\sqrt{3}+5}{26}$ D. $\frac{12\sqrt{3}-5}{26}$

7. 设 O 为坐标原点, 过点 $(2, 0)$ 的直线与抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 交于 M, N 两点, 若 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = -4$, 则 p 的值为

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 2 D. 4

8. 如图, 该组合体由一个正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 和一个正四棱锥 $P-A_1B_1C_1D_1$ 组合而成, 已知 $AB=2, AA_1=\sqrt{2}, PA_1=2$, 则



- A. $PA_1 \parallel$ 平面 ABC_1D_1 B. $PB_1 \parallel$ 平面 ABC_1D_1
 C. $PC_1 \perp$ 平面 BDC_1 D. $PD_1 \perp$ 平面 BDC_1

9 四名同学参加社会实践,他们中的每个人都可以从 A, B, C 三个项目中随机选择一个参加,且每人的选择相互独立.这三个项目中恰有一个项目没有被任何人选择的概率为

- A. $\frac{15}{16}$ B. $\frac{21}{32}$ C. $\frac{14}{27}$ D. $\frac{20}{27}$

10. 给出下述三个结论:①函数 $f(x) = \cos |x|$ 的最小正周期为 π ;②函数 $f(x) = |\cos 2x|$ 在区间 $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ 单调递增;③函数 $f(x) = \cos^2 x$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称.其中所有正确结论的编号是

- A. ①②③ B. ②③ C. ①③ D. ②

11. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左,右焦点分别为 F_1, F_2 . 点 A 在 C 上,

点 B 在 y 轴上, $\overrightarrow{BA} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BF_2}$, $\overrightarrow{F_1B} \perp \overrightarrow{AB}$, 则 C 的离心率为

- A. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{\sqrt{14} + \sqrt{2}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{14} + \sqrt{2}}{3}$

12. 若关于 x 的不等式 $\ln x \leq ax^3 - bx^2 - 1 (a \neq 0)$ 恒成立, 则 $\frac{b}{a}$ 的最大值为

- A. $\frac{1}{e^2}$ B. $\frac{2}{e^2}$ C. $\frac{1}{e}$ D. $\frac{2}{e}$

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。

13. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - y + 2 \geq 0, \\ 2x - y - 2 \leq 0, \\ 2x + y - 2 \geq 0, \end{cases}$ 则 $z = -3x + y$ 的最小值为 _____.

14. 已知 $\triangle ABC$ 的三边长 $AB = 4$ cm, $BC = 2$ cm, $AC = 3$ cm, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 _____ cm^2 .

15. 若 $f(x) = 2\cos(x + \varphi) + \cos x$ 为奇函数, 则 $\varphi =$ _____, (填写符合要求的一个值)

16. 已知球 O 的半径为 3, 相互垂直的两个平面分别截球面得两个圆 O_1, O_2 , 其半径分别为 r_1, r_2 , 若 $O_1O_2 = \sqrt{6}$, $r_2 = \sqrt{2}r_1$, 两圆的公共弦的中点为 M , 则 $MO_1 =$ _____.

三、解答题:共 70 分。解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤。第 17~21 题

必考题,每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题,考生依据要求作答。

(一)必考题:共 60 分。

17. (12 分)

某公司为改进生产,现对近 5 年来生产经营情况进行分析.收集了近 5 年的利润 y (单位:亿元)与年份代码 x 共 5 组数据(其中年份代码 $x=1,2,3,4,5$ 分别指 2019 年,2020 年, ..., 2023 年),并得到如下值: $\bar{y}=70.5$, $\sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2 = 65$,

$$\sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x}) = 25.$$

(1)若用线性回归模型拟合变量 y 与 x 的相关关系,计算该样本相关系数 r ,并判断变量 y 与 x 的相关程度(r 精确到 0.01);

(2)求变量 y 关于 x 的线性回归方程,并求 2024 年利润 y 的预报值.

附:① $\sqrt{6.5} \approx 2.55$;

②若 $|r| \geq 0.75$,相关程度很强; $0.3 \leq |r| < 0.75$,相关程度一般; $|r| \leq 0.3$,相关程度较弱;

③一组数据 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$,其回归直线 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$ 的斜率和截距

的最小二乘估计分别为 $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$, $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$; 相关系数 $r =$

$$\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}.$$

18. (12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $2S_n = 3a_n - 3, n \in \mathbb{N}^*$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

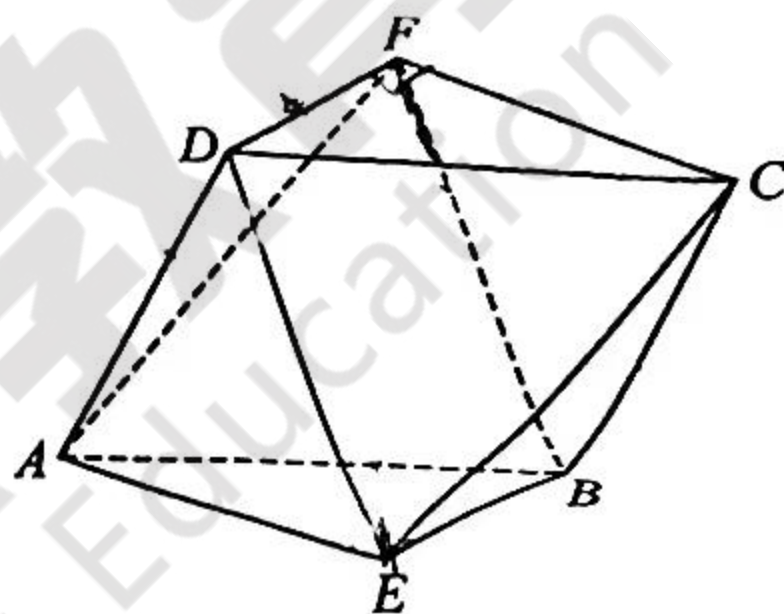
(2) 若 _____, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

从 ① $b_n = 3^n \log_3 a_n$; ② $b_n = \frac{3n \times 9^n}{a_{n+1}}$; ③ $b_n = \frac{n}{2}(a_{n+1} - a_n)$, 这三个条件中任选一个补

充在上面的横线上并解答问题. 注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.

19. (12 分)

如图, 在多面体 $ABCDEF$ 中, 四边形 $ABCD$ 为菱形, 平面 $FCD \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $EAB \perp$ 平面 $ABCD$, $\triangle AEB, \triangle CFD$ 是等腰直角三角形, 且 $\angle DFC = \angle BEA = \frac{\pi}{2}$.



(1) 证明: 平面 $ABF \parallel$ 平面 CDE ;

(2) 若 $\angle BAD \leq \frac{\pi}{3}$, 求平面 ADE 与平面 BCE 所成锐二面角的余弦值的取值范围.

20. (12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 左、右顶点分别为 A_1, A_2 , 过线段 A_1A_2 上的点 $Q(1, 0)$ 的直线与 C 交于 M, N 两点, 且 $\triangle A_1MN$ 与 $\triangle A_2MN$ 的面积比为 $3:1$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 若直线 MA_1 与 NA_2 交于点 P . 证明: 点 P 在定直线上.

21. (12 分)

已知函数 $f(x) = x \ln x - ax^2 - 2x$.

(1) 若过点 $(1, 0)$ 可作曲线 $y = f(x)$ 两条切线, 求 a 的取值范围;

(2) 若 $f(x)$ 有两个不同极值点 x_1, x_2 ,

① 求 a 的取值范围;

② 当 $x_1 > 4x_2$ 时, 证明: $x_1 x_2^2 > 16e^3$.

(二) 选考题: 共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题记分。

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

在直角坐标系 xOy 中, $\odot C$ 的圆心为 $C(2, 2)$, 半径为 2, 以坐标原点 O 为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系.

(1) 求 $\odot C$ 的极坐标方程;

(2) 过点 O 的直线交 $\odot C$ 于 P, Q 两点, 求 $|OP| + |OQ|$ 的最大值.

3. [选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

已知函数 $f(x) = |2 - x| + 2|x + 2|$.

(1) 若对任意 $x \in \mathbf{R}$, 使得 $f(x) \geq a^2 - 3a$ 恒成立, 求 a 的取值范围;

(2) 令 $f(x)$ 的最小值为 M . 若正数 a, b, c 满足 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} = M$, 求证: $a + b + c \geq 4$