

理科数学参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。

1. B 2. D 3. B 4. A 5. C 6. A 7. C 8. C 9. C 10. B 11. A 12. C

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. -6 14. $\frac{3\sqrt{15}}{4}$ 15. $\frac{2\pi}{3}$, 填写符合 $\varphi = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ 的一个值即可. 16. 1

三、解答题：共 70 分。

(一)必考题：共 60 分。

17. 【解析】(1)依题意, $\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3$, 1 分

$\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = (1-3)^2 + (2-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2 + (5-3)^2 = 10$, 2 分

则 $r = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{25}{\sqrt{10} \times \sqrt{65}} = \frac{25}{10 \times \sqrt{6.5}} \approx \frac{25}{10 \times 2.55} \approx 0.98$,

..... 4 分

则 $r > 0.75$, 故变量 y 与 x 的相关程度很强. 5 分

(2)令变量 y 与 x 的线性回归方程为 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$.

$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2} = \frac{25}{10} = 2.5$, 8 分

所以 $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 70.5 - 2.5 \times 3 = 63$, 9 分

所以, 变量 y 关于 x 的回归方程为 $y = 2.5x + 63$ 10 分

2024 年, 即 $x = 6$ 时, $y = 2.5 \times 6 + 63 = 78$ (亿元).

所以, 该公司 2024 年利润 y 的预报值为 78 (亿元). 12 分

18. 【解析】(1)由 $2S_n = 3a_n - 3$,

当 $n = 1$ 时, $2a_1 = 3a_1 - 3$, 得 $a_1 = 3$, 2 分

当 $n \geq 2$ 时, $2a_n = 2S_n - 2S_{n-1} = 3a_n - 3 - (3a_{n-1} - 3)$,

整理得, $a_n = 3a_{n-1}$,

又 $a_{n-1} \neq 0$, 所以 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = 3$, 5 分

所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 3, 公比为 3 的等比数列,

所以 $a_n = 3^n$ 6 分

(2) 若选①, 由(1)可得, $b_n = 3^n \log_3 a_n = n \cdot 3^n$, 7 分

所以 $T_n = 1 \times 3 + 2 \times 3^2 + 3 \times 3^3 + \cdots + n \cdot 3^n$,

$3T_n = 1 \times 3^2 + 2 \times 3^3 + 3 \times 3^4 + \cdots + n \cdot 3^{n+1}$,

两式相减得 $-2T_n = 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n - n \cdot 3^{n+1}$ 9 分

$$= \frac{3(1-3^n)}{1-3} - n \cdot 3^{n+1}$$

$$= \left(\frac{1}{2} - n\right) \cdot 3^{n+1} - \frac{3}{2},$$

所以 $T_n = \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{4}\right) \cdot 3^{n+1} + \frac{3}{4} (n \in \mathbf{N}^*)$ 12 分

若选②, 由(1)可得, $b_n = \frac{3n \times 9^n}{a_{n+1}} = \frac{3n \times 9^n}{3^{n+1}} = n \cdot 3^n$ 7 分, 后同.

若选③, 由(1)可得, $b_n = \frac{n}{2}(a_{n+1} - a_n) = \frac{n}{2}(3^{n+1} - 3^n) = n \cdot 3^n$ 7 分, 后同.

19. 【解析】(1) 如图, 取 AB, CD 的中点 M, N , 连接 ME, EN, NF, FM .

因为 $FN \perp DC$, 平面 $FCD \perp$ 平面 $ABCD$,

平面 $FCD \cap$ 平面 $ABCD = CD$,

所以 $FN \perp$ 平面 $ABCD$ 2 分

同理, $EM \perp$ 平面 $ABCD$.

所以 $FN \parallel ME$ 3 分

又 $\triangle AEB$ 和 $\triangle CFD$ 是等腰直角三角形, 所以 $FN = ME$,

四边形 $MENF$ 为平行四边形, 所以 $MF \parallel EN$,

又因为 $AB \parallel CD, AB \cap MF = M, CD \cap NE = N$,

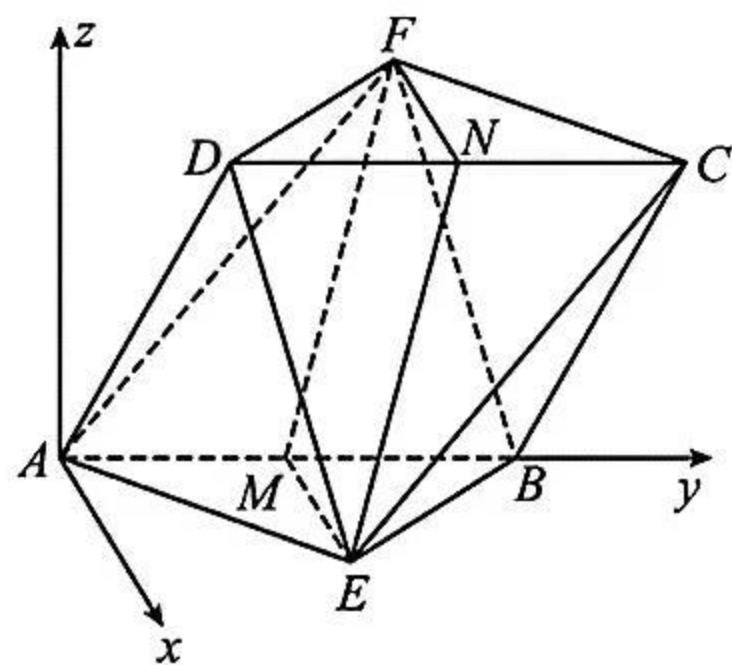
所以平面 $ABF \parallel$ 平面 CDE 4 分

(2) 如图, 以 A 点为原点, AB 所在直线为 y 轴, 过 A 平行于 ME 的直线为 x 轴, 在平面 $ABCD$ 内垂直于 AB 的直线为 z 轴, 建立空间直角坐标系.

设 $AB = 2, \angle BAD = \theta, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right]$,

则 $A(0, 0, 0), B(0, 2, 0), C(0, 2 + 2\cos\theta, 2\sin\theta), D(0, 2\cos\theta, 2\sin\theta), E(1, 1, 0)$.

所以 $\overrightarrow{AE} = (1, 1, 0), \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = (0, 2\cos\theta, 2\sin\theta), \overrightarrow{BE} = (1, -1, 0)$ 6 分



设平面 ADE 的法向量为 $\mathbf{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, 则

$$\begin{cases} \overrightarrow{AE} \cdot \mathbf{n}_1 = x_1 + y_1 = 0, \\ \overrightarrow{AD} \cdot \mathbf{n}_1 = 2\cos\theta \cdot y_1 + 2\sin\theta \cdot z_1 = 0. \end{cases}$$

令 $x_1 = 1$, 得 $y_1 = -1, z_1 = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$, 所以 $\mathbf{n}_1 = (1, -1, \frac{\cos\theta}{\sin\theta})$ 7 分

设平面 BCE 的法向量为 $\mathbf{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, 则

$$\begin{cases} \overrightarrow{BE} \cdot \mathbf{n}_2 = x_2 - y_2 = 0, \\ \overrightarrow{BC} \cdot \mathbf{n}_2 = 2\cos\theta \cdot y_2 + 2\sin\theta \cdot z_2 = 0. \end{cases}$$

令 $x_2 = -1$, 得 $y_2 = -1, z_2 = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$, 所以 $\mathbf{n}_2 = (-1, -1, \frac{\cos\theta}{\sin\theta})$ 8 分

$$\text{所以 } \cos\langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2}{\sqrt{2 + \left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2} \cdot \sqrt{2 + \left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2}} = \frac{\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2}{2 + \left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2}. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{设 } t = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \left(\theta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right] \right), \text{ 则 } t' = \frac{-\sin^2\theta - \cos^2\theta}{(\sin\theta)^2} = \frac{-1}{(\sin\theta)^2} < 0,$$

$$\text{所以 } t = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \text{ 在 } \left(0, \frac{\pi}{3}\right] \text{ 上单调递减, 所以 } t \in \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$$

$$\text{所以 } \cos\langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle = \frac{t^2}{2+t^2} = 1 - \frac{2}{2+t^2} \in \left[\frac{1}{7}, 1\right), \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

所以平面 ADE 与平面 BCE 所成锐二面角的取值范围是 $\left[\frac{1}{7}, 1\right)$.

$$20. \text{【解析】(1) 由 } Q(1, 0), S_{\triangle A_1 MN} = \frac{1}{2} |MN| d_{A_1-MN}, S_{\triangle A_2 MN} = \frac{1}{2} |MN| d_{A_2-MN},$$

$$\text{故 } \frac{S_{\triangle A_1 MN}}{S_{\triangle A_2 MN}} = \frac{d_{A_1-MN}}{d_{A_2-MN}} = \frac{|A_1 Q|}{|A_2 Q|} = \frac{a+1}{a-1} = 3, \text{ 则 } a = 2. \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{由 } e = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 得 } c = \sqrt{3}, b = 1,$$

$$\text{故椭圆 } C \text{ 的方程为: } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2) 由(1)可得 $A_1(-2, 0), A_2(2, 0)$, 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$.

显然直线 MN 的斜率不为 0, 所以设直线 MN 的方程为 $x = my + 1$.

$$\text{将 } x = my + 1 \text{ 与 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \text{ 联立,}$$

$$\text{可得 } (m^2 + 4)y^2 + 2my - 3 = 0,$$

$$\text{其中 } \Delta = 16(m^2 + 3) > 0,$$

则 $y_1 + y_2 = \frac{-2m}{m^2 + 4}, y_1 y_2 = \frac{-3}{m^2 + 4}$ 7 分

因为直线 MA_1 的方程为 $y = \frac{y_1}{x_1 + 2}(x + 2)$, 直线 NA_2 的方程为 $y = \frac{y_2}{x_2 - 2}(x - 2)$,

联立直线 MA_1 与直线 NA_2 的方程可得:

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{x-2} &= \frac{y_2(x_1+2)}{y_1(x_2-2)} = \frac{y_2(my_1+3)}{y_1(my_2-1)} = \frac{my_1y_2+3(y_1+y_2)-3y_1}{my_1y_2-y_1} \\ &= \frac{m \cdot \frac{-3}{m^2+4} + 3 \cdot \frac{-2m}{m^2+4} - 3y_1}{m \cdot \frac{-3}{m^2+4} - y_1} = \frac{\frac{-9m}{m^2+4} - 3y_1}{\frac{-3m}{m^2+4} - y_1} = 3. \end{aligned} \quad \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

由 $\frac{x+2}{x-2} = 3$ 可得 $x = 4$, 即 $x_P = 4$,

故点 P 在定直线 $x = 4$ 上. 12 分

21. 【解析】(1) 依题意, $f'(x) = \ln x - 2ax - 1$,

设过点 $(1, 0)$ 的直线与曲线 $y = f(x)$ 相切时的切点为 (x_0, y_0) , 斜率 $k = \ln x_0 - 2ax_0 - 1$,

则 $y - (x_0 \ln x_0 - ax_0^2 - 2x_0) = (\ln x_0 - 2ax_0 - 1)(x - x_0)$, 点 $(1, 0)$ 的坐标代入可得,

则 $-x_0 \ln x_0 + ax_0^2 + 2x_0 = (\ln x_0 - 2ax_0 - 1)(1 - x_0)$,

即有 $ax_0^2 - 2ax_0 - x_0 + \ln x_0 - 1 = 0$, 2 分

解法 1: 若过点 $(1, 0)$ 可作曲线 $y = f(x)$ 两条切线, 只需方程 $ax_0^2 - 2ax_0 - x_0 + \ln x_0 - 1 = 0$ 方程有两个不相等的实数根即可.

令 $g(x) = ax^2 - 2ax - x + \ln x - 1$, 只需函数 $g(x)$ 有 2 个零点即可.

则 $g'(x) = 2ax - 2a - 1 + \frac{1}{x} = \frac{2ax^2 - (2a+1)x + 1}{x} = \frac{(2ax-1)(x-1)}{x}$, 3 分

① 若 $a > \frac{1}{2}$, 则 $0 < x < \frac{1}{2a}$ 时, $g'(x) > 0$; $\frac{1}{2a} < x < 1$ 时, $g'(x) < 0$; $x > 1$ 时, $g'(x) > 0$,

此时 $x = \frac{1}{2a}$ 时, $g(x)$ 取极大值; $x = 1$ 时, $g(x)$ 取极小值,

又 $g\left(\frac{1}{2a}\right) = a \cdot \left(\frac{1}{2a}\right)^2 - 2a \cdot \frac{1}{2a} - \frac{1}{2a} + \ln \frac{1}{2a} - 1 = -\ln 2a - \frac{1}{4a} - 2 < 0$,

$x \rightarrow +\infty$ 时, $g(x) \rightarrow +\infty$,

函数 $g(x)$ 只有 1 个零点, 不合题意. 4 分

② 若 $0 < a < \frac{1}{2}$, 同理可知, 此时 $x = 1$ 时, $g(x)$ 取极大值; $x = \frac{1}{2a}$ 时, $g(x)$ 取极小值,

又 $g(1) = -a - 2 < 0$, $x \rightarrow +\infty$ 时, $g(x) \rightarrow +\infty$,

函数 $g(x)$ 只有 1 个零点, 不合题意.

③若 $a \leq 0, 2ax - 1 \leq 0$, 则 $0 < x < 1$ 时, $g'(x) > 0$; $x > 1$ 时, $g'(x) < 0$,

所以 $x=1$ 时, $g(x)$ 取极大值 $g(1) = -a - 2$,

又 $x \rightarrow 0$ 时, $g(x) \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow +\infty$ 时, $g(x) \rightarrow -\infty$,

函数 $g(x)$ 有 2 个零点, 则必有 $g(1) = -a - 2 > 0$, 得 $a < -2$,

故过点 $(1, 0)$ 可作曲线 $y = f(x)$ 两条切线时, a 的取值范围是 $(-\infty, -2)$ 6 分

解法 2: 显然, $x \neq 2$.

若过点 $(1, 0)$ 可作曲线 $y = f(x)$ 两条切线, 只需方程 $a = \frac{x_0 + 1 - \ln x_0}{x_0^2 - 2x_0}$ 方程有两个不相等的实

数根即可. 令 $g(x) = \frac{x+1-\ln x}{x^2-2x}$,

则 $g'(x) = \frac{\left(1 - \frac{1}{x}\right)(x^2 - 2x) - (x+1-\ln x)(2x-2)}{(x^2-2x)^2} = \frac{(x-1)(2\ln x - x - 4)}{(x^2-2x)^2}$, 2 分

令 $u(x) = 2\ln x - x - 4$, 则 $u'(x) = \frac{2}{x} - 1$,

可知 $0 < x < 2$ 时, $u'(x) > 0$, $u(x)$ 单调递增; $x > 2$ 时, $u'(x) < 0$, $u(x)$ 单调递减,

所以 $u(x) \leq u(2) < \ln 2 - 6 < 0$,

故当 $0 < x < 1$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增; $1 < x < 2$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减; $x > 2$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减.

又 $x > 2$ 时, 由 $\ln x < x + 1$, 则 $g(x) > 0$;

由上可知 $x=1$ 时, $g(x)$ 取得极大值, 也即为 $x \in (0, 2)$ 时, $g(x)$ 取得最大值 $g(1) = -2$,

又 $x \rightarrow 0$ 时, $g(x) \rightarrow -\infty$; $x \rightarrow 2^-$ 时, $g(x) \rightarrow -\infty$,

函数 $g(x)$ 的大致图象如右图所示.

所以 $a = \frac{x_0 + 1 - \ln x_0}{x_0^2 - 2x_0}$ 方程有两个不相等的实数根时, $a < -2$.

故过点 $(1, 0)$ 可作曲线 $y = f(x)$ 两条切线时,

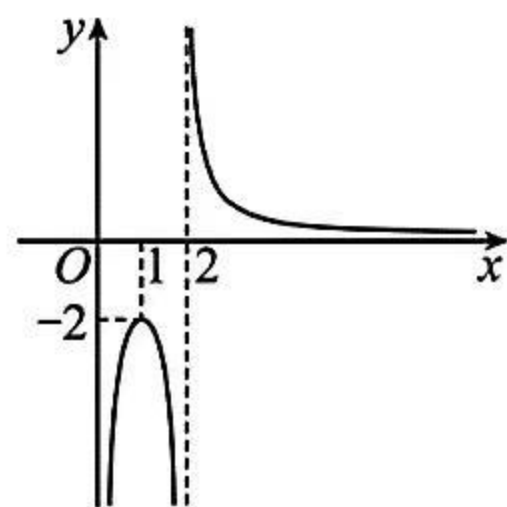
a 的取值范围是 $(-\infty, -2)$ 6 分

(2) ①由(1)知, $f'(x) = \ln x - 2ax - 1$,

因为 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , $f'(x) = 0$ 即 $2a = \frac{\ln x - 1}{x}$ 有两个实数根 x_1, x_2 ,

令 $m(x) = \frac{\ln x - 1}{x}$, $m'(x) = \frac{2 - \ln x}{x^2}$,

可知 $0 < x < e^2$ 时, $m'(x) > 0$, $m(x)$ 单调递增, 此时 $m(x) < \frac{1}{e^2}$; 当 $x > e^2$ 时, $m'(x) < 0$, $m(x)$



单调递减, 此时 $0 < m(x) < \frac{1}{e^2}$,

所以 $f'(x)=0$ 即 $2a = \frac{\ln x - 1}{x}$ 有两个实数根时, $0 < 2a < \frac{1}{e^2}$.

则 $f(x)$ 有两个极点时, $a \in (0, \frac{1}{2e^2})$ 8 分

$$\textcircled{2} \text{ 由 } \begin{cases} \ln x_1 - 2ax_1 - 1 = 0, \\ \ln x_2 - 2ax_2 - 1 = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} \ln x_1 = 2ax_1 + 1, \\ \ln x_2 = 2ax_2 + 1, \end{cases} \text{ 得 } 2a = \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2},$$

要证明 $x_1 x_2^2 > 16e^3$, 只需证明 $\ln x_1 + 2\ln x_2 > 4\ln 2 + 3$.

$$\text{由题, } \ln x_1 + 2\ln x_2 = 2a(x_1 + 2x_2) + 3 = (x_1 + 2x_2) \cdot \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} + 3 = \left(\frac{x_1}{x_2} + 2\right) \cdot \frac{\ln \frac{x_1}{x_2}}{\frac{x_1}{x_2} - 1} + 3,$$

令 $t = \frac{x_1}{x_2} (x_1 > 4x_2)$, 则 $t > 4$,

欲证明 $\ln x_1 + 2\ln x_2 > 4\ln 2 + 3$, 也即证明 $(t+2) \cdot \frac{\ln t}{t-1} > 4\ln 2 (t > 4)$, 10 分

只需证明 $\ln t - 4\ln 2 \cdot \frac{t-1}{t+2} > 0 (t > 4)$ 即可,

令 $h(t) = \ln t - 4\ln 2 \cdot \frac{t-1}{t+2} (t > 4)$,

$$\text{可知 } h'(t) = \frac{1}{t} - 4\ln 2 \cdot \frac{3}{(t+2)^2} = \frac{t^2 + 4t + 4 - 12\ln 2 \cdot t}{t(t+2)^2} = \frac{t + 4 + \frac{4}{t} - 12\ln 2}{t^2(t+2)^2},$$

则 $\varphi(t) = t + 4 + \frac{4}{t} - 12\ln 2$ 在 $t > 4$ 时单调递增, 故 $\varphi(t) > \varphi(4) = 9 - 12\ln 2 > 0$, 则 $h'(t) > 0$,

令 $h(t)$ 在 $t > 4$ 时单调递增, 则 $h(t) > h(4) = \ln 4 - 4 \times \frac{1}{2} \times \ln 2 = 0$,

故 $(t+2) \cdot \frac{\ln t}{t-1} > 4\ln 2 (t > 4)$, 即 $\ln x_1 + 2\ln x_2 > 4\ln 2 + 3$,

所以 $x_1 x_2^2 > 16e^3$ 12 分

(二) 选考题: 共 10 分。

22. 【解析】(1) 由题知, $\odot C$ 的直角坐标方程为 $C: (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$, 2 分

即 $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$,

故 $\odot C$ 的极坐标方程为 $\rho^2 - 4\rho \cos \theta - 4\rho \sin \theta + 4 = 0$ 4 分

(2) 设 $PQ: \theta = \alpha, \alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, $OP = \rho_1, OQ = \rho_2$.

联立直线 PQ 和圆 C 的方程得:

$$\rho^2 - 4\rho\cos\alpha - 4\rho\sin\alpha + 4 = 0, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{则 } \rho_1 + \rho_2 = 4(\cos\alpha + \sin\alpha), \rho_1\rho_2 = 4. \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{故 } |OP| + |OQ| = \rho_1 + \rho_2 = 4(\cos\alpha + \sin\alpha) = 4\sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right), \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{故当 } \alpha = \frac{\pi}{4} \text{ 时, } |OP| + |OQ| \text{ 取得最大值 } 4\sqrt{2}. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

23. 【解析】(1) 当 $x < -2$ 时, $f(x) = -3x - 2 > 4$; 当 $-2 \leq x \leq 2$ 时, $f(x) = x + 6 \in [4, 8]$; 当 $x > 2$ 时, $f(x) = 3x + 2 > 8$. 则 $f(x)$ 的最小值为 4. $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

由于对任意 $x \in \mathbf{R}$, 使得 $f(x) \geq a^2 - 3a$ 恒成立,

所以 $4 \geq a^2 - 3a$, 解得 $-1 \leq a \leq 4$,

故 a 的取值范围是 $[-1, 4]$. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2) 由(1)可知 $f(x)$ 的最小值为 $M = 4$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} = 4$,

$$\text{则 } 4(a+b+c) = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c}\right)(a+b+c) = 6 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b} + \frac{c}{b} + \frac{4a}{c} + \frac{4b}{c} \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$= 6 + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) + \left(\frac{c}{b} + \frac{4b}{c}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{4a}{c}\right) \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\geq 6 + 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} + 2\sqrt{\frac{c}{b} \cdot \frac{4b}{c}} + 2\sqrt{\frac{c}{a} \cdot \frac{4a}{c}}$$

$$= 16,$$

当且仅当 $\frac{b}{a} = \frac{a}{b}, \frac{c}{b} = \frac{4b}{c}, \frac{c}{a} = \frac{4a}{c}$ 且 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} = 4$ 取“=”, 即 $a = b = 1, c = 2$ 取“=”.

所以 $a + b + c \geq 4$. $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$